Comandante

PAULO PESSOA

GEOMETRIA

CURSO GINASIAL

DE ACÔRDO COM O PROGRAMA OFICIAL

J.OZON+EDITOR

ADMISSÃO: AO COLÉGIO NAVAL
CURSOS PREPARATÓRIOS DE CADETES
E ESCOLA DE MARINHA MERCANTE
ARTIGO 99
CURSO NORMAL DOS INSTITUTOS DE EDUCAÇÃO

GEO TRIA

ÁLGEBRA

ARITMÉTICA

Problemas de GEOMETRIA, completa, com Problemas de ÁLGEBRA e com Problem... de ARITMÉTICA, ... PROBLEM... qual está reuni... que há sôbre ... assuntos no Curso GINASIAL. Os alunos de Ginásio (tôdas as séries), os candidatos do ART. 99, 1.º CICLO e ... alunos do NORMAL, encontrarão nesta obra

Comte. PAULO PESSOA

PROBLEMAS DE GEOMETRIA

PARA TODO O CURSO GINASIAL, DE ACÔRDO COM O PROGRAMA EM VIGOR, ELABORADO COM ESPECIALIDADE PARA OS CANDIDATOS AO C. NAVAL, E. PREPARATÓRIA DE CADETES DO AR, ADMISSÃO AO CURSO NORMAL E E. DA MARINHA MERCANTE.



J. OZON + EDITOR

BELÉM
Rua 13 de Maio, 458
Telefone: 1855

NITERÓI
Rua da Conceição, 137
Sala 909 - Tel. 7512

RIO
Av. Mal. Floriano, 22 - 1.º
Telefones: 23-3943/43-6064
Rua Barão Guaratiba, 29/31
Telefone: 45-7126

FORTALEZA
Rua Pedro Pereira,
818 — Grupo 5
Telefone: 1-9357

SÃO PAULO
Largo do Paissandu, 51
4.º andar — Grupo 411
15.º and. - Grupos 1501/2
Telefone: 35-8815

À MEMÓRIA DE MINHA NETA
MARCINHA, COM A SAUDADE
IMENSA DE SEU AVÔ

PAULO.

ÂNGULOS. COMPLEMENTO, SUPLEMENTO E REPLEMENTO DE UM ÂNGULO. DIVERSAS ESPÉCIES DE ÂNGULOS. MEDIDAS DE ÂNGULOS.

Ângulo é a figura formada por duas semi-retas que partem do mesmo ponto ou que têm a mesma origem.

A origem ou ponto comum às duas semi-retas, é o *vértice do ângulo;* as semi-retas são os *lados do ângulo.*

Podemos obter um ângulo se imprimirmos a uma semi-reta, um movimento de rotação em tôrno de uma de suas extremidades, em um sentido qualquer, de modo que ela não saia do plano.

Assim sendo, podemos imprimir à semi-reta uma rotação completa em tôrno do ponto e teremos um *ângulo de uma volta,* ou um *ângulo cheio,* no valor de 360°; podemos imprimir um movimento que corresponda à uma metade de volta e teremos um *ângulo de meia volta* ou um *ângulo raso,* correspondendo a 180°. O giro da semi-reta poderá corresponder, apenas a $^{1}/_{4}$ de volta e teremos um *ângulo reto* ou um *ângulo de 90°.*

Evidentemente que a semi-reta em seu movimento de rotação ocupa um sem número de posições intermediárias,

em relação às citadas e formará ângulos de diversos valôres que, em resumo, poderão ser menores que 90° e maiores que 90°.

Teremos então: *ângulos agudos,* quando menores que 90° e *ângulos obtusos* para os maiores que 90°.

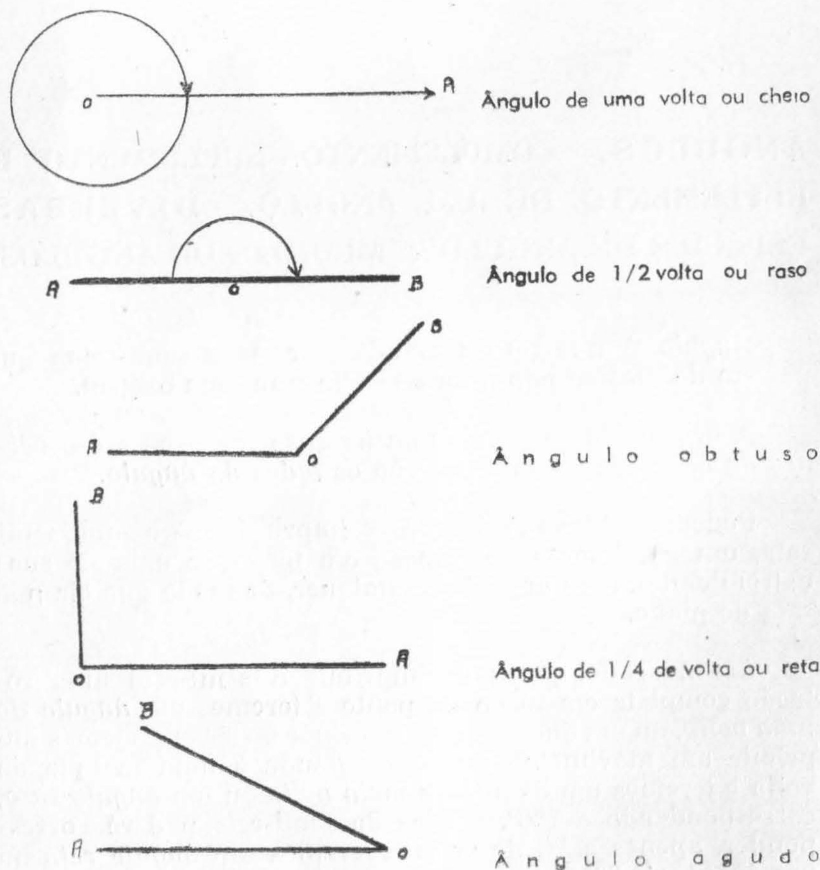


FIG. 1

Ângulos adjacentes — Dois ângulos são *adjacentes* quando têm um lado comum e os outros dois lados, de um lado e do outro, do lado comum.

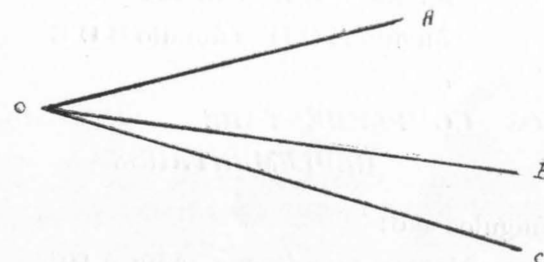


FIG. 2

O B é o lado comum.

Os ângulos AOB e BOC, são *adjacentes.*

Ângulos opostos pelo vértice — São dois ângulos tais que os lados de um dêles são os prolongamentos dos lados do outro.

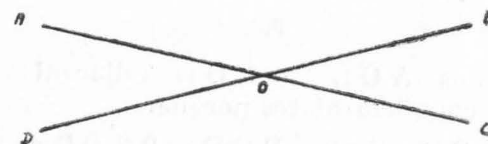


FIG. 3

Os ângulos AOB e DOC, são opostos pelo vértice (iguais).

Os ângulos AOD e BOC, são opostos pelo vértice (iguais).

Os lados do ângulo DOC, são os prolongamentos dos lados OB e OA, do ângulo AOB e vice-versa.

Teorema 1

Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.

Relação:

ângulo A O B = ângulo D O C

ângulo A O D = ângulo B O C

ÂNGULOS COMPLEMENTARES, SUPLEMENTARES E REPLEMENTARES

Dois ângulos são:

Complementares: quando sua soma é 90°

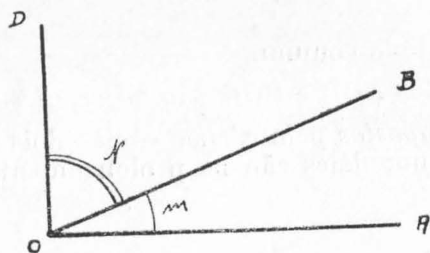


FIG. 4

Os ângulos A O B e B O D adjacentes (lado O B comum) são complementares porque

ângulo A O B + ângulo B O D = 90° (1/4 de volta)

Suplementares: quando somados valem 180° ou quando adjacentes os lados não comuns estão em linha reta.

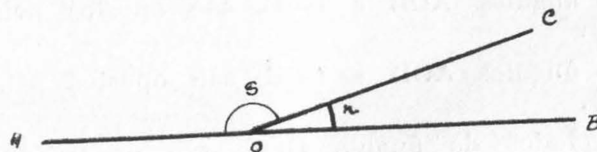


FIG. 5

Os ângulos A O C (s) e C O B (r), adjacentes (lado comum OC) são suplementares, porque

ângulo A O C + ângulo C O B = 180° (1/2 volta)

Replementares: Quando somam 360°

Bissetriz — Bissetriz de um ângulo é a semi-reta interior ao ângulo, com origem no vértice e que divide o ângulo ao meio. É também, o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo.

(Entende-se por *lugar geométrico* a um conjunto de pontos que gozam de uma mesma propriedade, que lhes é peculiar.

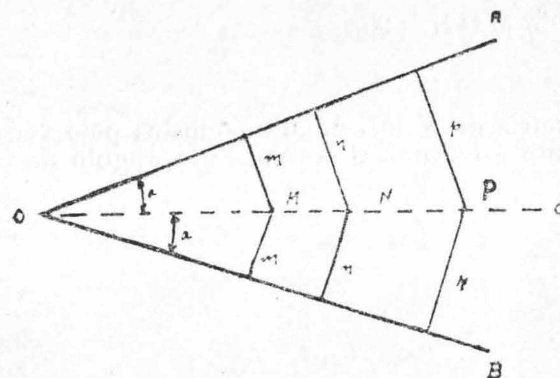


FIG. 6

Na figura 6, A O B é o ângulo e O C a bissetriz.

Os pontos O, M, N e P eqüidistam dos lados do ângulo, isto é, a distância de M ao lado A O é *m* e também é *m* a distância do ponto M ao lado O B. O mesmo poderíamos dizer para os pontos N e P ou qualquer outro que pertencer a bissetriz do ângulo.

Teorema 2

As bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares, são perpendiculares, isto é, cortam-se em ângulo reto.

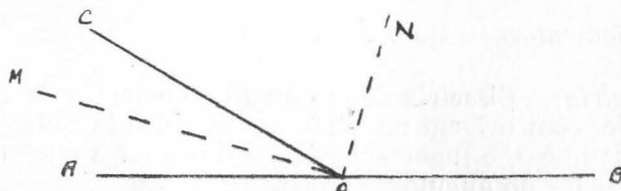


FIG. 7

Na figura 7 temos os ângulos adjacentes suplementares A O C e C O B; suas bissetrizes são respectivamente O M e O N.

O ângulo M O N = 90°

Teorema 3

As bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice estão em linha reta e cortam-se segundo um ângulo de 90°.

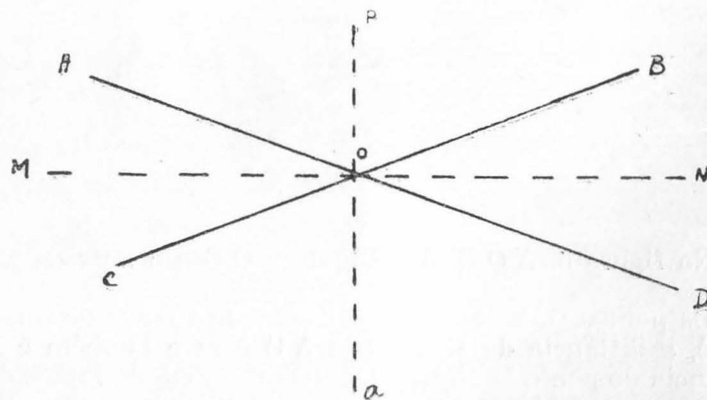


FIG. 8

Na figura 8, os ângulos A O C e B O D, são opostos pelo vértice. As bissetrizes dêles são O M e O N que é a linha reta M N.

O mesmo se poderá dizer dos ângulos A O B e C O D que também são opostos pelo vértice e cujas bissetrizes são O P e O Q, que formam a reta P Q.

As retas M N e P Q, se cortam em ângulo reto, isto é, são perpendiculares.

Teorema 4

Todos os ângulos retos são iguais.

Medidas de ângulos

Em virtude do teorema 4 o ângulo reto é uma grandeza angular determinada podendo ser tomado como unidade para medida de ângulos e representado pela letra *r*.

Como tôda unidade de medida tem múltiplos (sem designações especiais) e submúltiplos, dos quais o único que tem denominação é o que representa a centésima parte do ângulo reto (0,01 r) e que se chama grado, que se abrevia por *g* ou *gr*.

É o sistema decimal para medir ângulos.

O sistema complexo também é empregado na medição dos ângulos e a unidade desse sistema é o *grau sexagesimal* ou simplesmente *grau* e que se representa por um pequeno *o* sôbre e a direita do número.

Sabemos que o grau tem 60 minutos (60') e o minuto 60 segundos (60").

Do exposto conclui-se que

$$1 \text{ reto} = 90^{\circ} = 100^{gr}$$

Um regra de três simples, permite transformar graus em grados ou vice versa, como mostraremos oportunamente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) O ângulo A = 80°. Calcular:

a) o seu complemento

b) o seu suplemento

c) o seu replemento

Depois do que foi dito com relação a ângulos complementares, suplementares e replementares, podemos escrever:

a) $A + x = 90°$ (complementares)
$80 + x = 90°$ e $x = 10°$

b) $A + y = 180°$ (suplementares)
$80 + y = 180°$ e $y = 100°$

c) $A + z = 360°$ (replementares)
$80 + z = 360°$ e $z = 280°$

2) Dado o ângulo A igual a 73° 20' 18", achar:

a) o seu complemento

b) o seu suplemento

c) o seu replemento

Do mesmo modo teremos:

a) $A + x = 90°$ (complementares)
$73° \; 20' \; 18'' + x = 90°$

Teremos:

$$\begin{array}{rrrr} 90° = & 89° & 59' & 60'' \\ A = & 73° & 20' & 18'' \\ \hline \text{(complemento)} \quad x = & 16° & 39' & 42'' \end{array}$$

b) $A + y = 180°$ (suplementares)
$73° \; 20' \; 18'' + y = 180°$

Teremos então:

$$\begin{array}{rrrr} 180° = & 179° & 59' & 60'' \\ A = & 73° & 20' & 18'' \\ \hline \text{(suplemento)} \quad y = & 106° & 39' & 42'' \end{array}$$

c) $A + z = 360°$ (replementares)

$73° \; 20' \; 18'' + z = 360°$

$$\begin{array}{rrrr} 360° = & 359° & 59' & 60'' \\ A = & 73° & 20' & 18'' \\ \hline \text{(replemento)} \quad z = & 286° & 39' & 42'' \end{array}$$

3) Dois ângulos são complementares; calcular êsses ângulos nos casos abaixo:

a) o maior é o triplo do menor

b) um dêles é a quarta parte do outro

c) a diferença entre eles é de 12°

a) Se um dos ângulos fôr x o outro será 3 x.
Como são complementares:

$x + 3\,x = 90°$ ou

$4\,x = 90°$ e $x = 22° \; 30'$

O outro que é 3 x, será

$3 \times 22° \; 30' = 67° \; 30'$

b) Se um dos ângulos fôr x o outro será $\frac{x}{4}$

Como são suplementares:

$$x + \frac{x}{4} = 180^\circ \text{ ou}$$

$$5\,x = 720^\circ \text{ e}$$
$$x = 144^\circ$$

O outro $\frac{x}{4}$ será:

$$\frac{144^\circ}{4} = 36^\circ$$

c) Se um dêles fôr x, o outro será:

$$90 - x$$

Como a diferença entre êles é 12°, teremos:

$$x - (90 - x) = 12 \text{ ou}$$
$$x - 90 + x = 12 \text{ ou}$$
$$2\,x = 102 \text{ e } x = 51^\circ$$

O outro será:

$$90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$$

4) Qual o ângulo que excede o seu complemento de 38°?

Se chamarmos o ângulo de x, o seu complemento será 90 — x.

O problema permite escrever:

$$x - (90 - x) = 38^\circ \text{ ou } 2\,x = 128^\circ \text{ e } x = 64^\circ$$

5) Dois ângulos adjacentes têm os lados exteriores em linha reta.

Calcular esses ângulos sabendo que êles são expressos em graus, respectivamente por:

$$10\,x + 25^\circ \text{ e } 5\,x + 5^\circ$$

Vimos no início do capítulo que dois ângulos adjacentes nas condições do problema, não suplementares; então:

$$10\,x + 25^\circ + 5\,x + 5^\circ = 180^\circ \text{ ou}$$

$$15\,x = 150 \text{ e } x = 10$$

Os ângulos que, expressos em graus, valem

$$10\,x + 25 \text{ ou } 10 \times 10 + 25 = 125^\circ \text{ e}$$

$$5\,x + 5 \text{ ou } 5 \times 10 + 5 = 55^\circ$$

6) Calcular dois ângulos opostos pelo vértice que, em graus, são expressos respectivamente por

$$8\,x + 3^\circ \text{ e } 9\,x - 2^\circ$$

Vimos no início do capítulo que dois ângulos opostos pelo vértice são iguais; assim sendo:

$$8\,x + 3^\circ = 9\,x - 2^\circ \text{ e } x = 5^\circ$$

como os ângulos são

$$8\,x + 3 \text{ e } 9\,x - 2 \text{ teremos:}$$

$$8 \times 5^\circ + 3^\circ = 43^\circ \text{ e } 9 \times 5^\circ - 2^\circ = 43^\circ$$

7) Em tôrno de um ponto de uma reta e do mesmo lado traçam-se três ângulos: o primeiro é expresso em graus por $2x + 15$, o segundo, por $5x - 5$ e o terceiro por $6x + 25$. Calcular êsses ângulos.

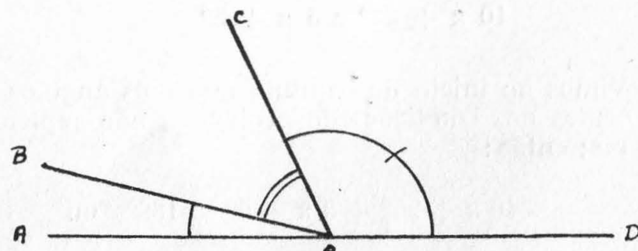


FIG. 9

Vimos que os ângulos formados em tôrno de um ponto e do mesmo lado de uma reta é um ângulo raso ou de meia volta e que vale 180°.

Então:

$$2x + 15 + 5x - 5 + 6x + 25 = 180^\circ \quad \text{ou}$$

$$13x + 35 = 180^\circ \quad \text{e}$$

$$x = \frac{145}{13} = 11^\circ\ 9'\ 13''\frac{11}{13}$$

Então:

$$\text{Ângulo AOB} = 2 \times \left(11^\circ\ 9'\ 13''\frac{11}{13}\right) + 15^\circ =$$

$$= 22^\circ\ 18'\ 27''\frac{9}{13} + 15^\circ = 37^\circ\ 18'\ 27''\frac{9}{13}$$

$$\text{O ângulo BOC} = 5\left(11^\circ\ 9'\ 13''\frac{11}{13}\right) - 5^\circ$$

$$= 55^\circ\ 46'\ 9''\frac{3}{13} - 5^\circ = 50^\circ\ 46'\ 9''\frac{3}{13}$$

$$\text{O ângulo COD} = 6\left(11^\circ\ 9'\ 13''\frac{11}{13}\right) + 25 =$$

$$= 66^\circ\ 55'\ 23''\frac{1}{13} + 25^\circ = 91^\circ\ 55'\ 23''\frac{1}{13}$$

8) Achar a medida no sistema decimal do ângulo de 40°.

Já vimos que

90° correspondem a 100 gr

Então

90° — 100 gr
40° — x

$$x\ \frac{100 \times 40}{90} = 4{,}44\ \text{gr}$$

9) Achar a medida no sistema decimal do ângulo de 37° 7' 30"

Sabemos que

$$90° = 324000" \quad - \quad 100^{gr}$$
$$37° \; 7' \; 30" = 133650" \quad - \quad x$$

$$x = \frac{133650 \times 100}{324000} = 41{,}25^{gr}$$

10) Achar a medida no sistema sexagesimal do ângulo de $42{,}508^{gr}$.

Como nos exemplos anteriores

$$90° \quad - \quad 100^{gr}$$
$$x \quad - \quad 42{,}508$$

$$x = \frac{90 \times 42{,}508}{100} = 38° \; 15' \; 25",92$$

11) Calcular o complemento do ângulo de 74,81 grados.

O complemento é o que falta ao ângulo para 100 grados; então

$$100 - 74{,}81 = 25{,}19^{gr}.$$

12) Achar o suplemento do ângulo de 127,43 grados.

O suplemento é o que falta ao ângulo para completar 200 grados; então:

$$200 - 127{,}43 = 72{,}57^{gr}$$

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) O ângulo $A = 53°$: Calcular:

a) o seu complemento
b) o seu suplemento
c) o seu replemento

RESP.: a) 37°; b) 127° c) 307°

2) Dado o ângulo $A = 87° \; 45' \; 37"$, achar:

a) seu complemento
b) seu suplemento
c) o seu replemento

RESP.: a) 2° 14' 23"; b) 92° 14' 23"; c) 272° 14' 23"

3) Dois ângulos são suplementares; calcular esses ângulos sabendo que:

1.° — o maior é o quádruplo do menor
2.° — um deles é $^2/_3$ do outro
3.° — que sua diferença é 23° 11' 15"

RESP.: 1.°) 36° e 144°; 2.°) 108° e 72°; 3.°) 101° 35' 37",5 e 78° 24' 22",5

4) Qual o ângulo que excede o seu suplemento de 15° 28' 49".

RESP.: 97° 44' 24",5

5) O dôbro do complemento de um ângulo, aumentado de 32°, é, igual ao seu suplemento. Qual é êsse ângulo?

RESP.: 32°

6) A soma de dois ângulos mede 42°. Um dêles é a têrça parte do complemento do outro. Calcular êsses ângulos.

RESP.: 18° e 24°

7) A diferença entre dois ângulos complementares é de 27° 32'. Calcular os dois ângulos.

RESP.: 58° 46' e 31° 14'

8) Dois ângulos opostos pelo vértice são expressos em graus respectivamente, por $5x + 2°$ e $2x + 44°$. Determinar o valor dêsses ângulos.

RESP.: 65°

9) Dois ângulos adjacentes têm os lados externos em linha reta. Um dêles é expresso em graus por $2x + 5°$ e o outro por $x + 7°$. Determinar êsses ângulos.

RESP.: 117° e 63°

10) Em tôrno de um ponto e do mesmo lado de uma reta, traçam-se três ângulos. O primeiro é expresso em graus por $2x + 10°$; o segundo por $3x - 5°$ e o terceiro, por $7x + 7°$. Determinar esses ângulos.

RESP.: 38°; 37° e 105°

11) Em tôrno de um ponto sôbre um plano traçam-se três ângulos expressos em graus respectivamente por: $7x + 10°$; $6x + 30°$ e $4x - 20°$. Calcular êsses três ângulos.

RESP.: 150°; 150° e 60°

12) Em tôrno de um ponto, sôbre um plano traçam-se os ângulos *a, b, c, d*. Calcular êsses ângulos sabendo que *a* e *c* são complementares; que a diferença entre os outros dois é 30° e que *a* é o dôbro de *c*.

RESP.: a) = 60°; b) = 150°;
c) = 30° e d) = 120°.

13) Em tôrno de um ponto traçam-se quatro ângulos *a, b, c* e *d*. O ângulo *a* é reto, o ângulo *b* tem mais 5° que o suplemento de *d* e o ângulo *d* é a soma dos ângulos *b* e *c* diminuida de 50°. Achar os ângulos *b, c* e *d*.

RESP.: 75°; 85° e 110°

14) Em tôrno de um ponto e do mesmo lado da reta, traçam-se os ângulos *a, b, c,* e *d*. Calcular esses ângulos sabendo que *a* e *c* são complementares e que a diferença entre os outros dois é de 40° 12' 27",8 e que *c* é o triplo de *a*.

RESP.: a = 22° 30'; b = 65° 6' 13",9; c = 67° 30'; d = 24° 53' 46",1

15) Em tôrno de um ponto estão formados quatro ângulos proporcionais aos números 2, 3, 5 e 8. Determinar esses ângulos.

RESP.: 40°; 60°; 100° e 160°

16) Determinar a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes sabendo que o primeiro vale $^1/_4$ do seu suplemento e o segundo $^1/_5$ de seu replemento.

RESP.: 48°

17) Por um ponto O de uma reta MN traçam-se, do mesmo lado da reta, os segmentos OA e OB, formando os ângulos MOA, AOB e BON. As bissetrizes dos ângulos formados são OP; OQ e OR. Calcular os três ângulos sabendo que o ângulo MOQ = = 115° e o ângulo POR é igual a 105°.

RESP.: 100°; 30° e 50°



18) Achar a medida no sistema centesimal do ângulo de 45°.

RESP.: 50 ^{gr}

19) Achar a medida no sistema centesimal do ângulo de 16° 36' 18".

RESP.: 18,45^{gr}

20) Achar a medida no sistema sexagesimal do ângulo de 33,676 ^{gr}.

RESP.: 30° 18' 30",24

21) Achar o complemento do ângulo de 45 grados.

RESP.: 55 grados

22) Achar o suplemento do ângulo de 97,831 grados.

RESP.: 102,169 ^{gr}

23) A soma do complemento, do suplemento e do replemento de um ângulo é 573,21 grados. Achar as medidas centesimal e sexagesimal desse ângulo.

RESP.: 42,26 ^{gr} e 38° 2' 2",4

TRIÂNGULOS

Triângulo é o polígono de tres lados ou uma parte do plano limitado por tres retas que se encontram duas a duas. É o mais simples dos polígonos.

Seus elementos principais são: os *tres ângulos* e os *tres lados*. Qualquer dos lados que fique para baixo é a *base* do triângulo.

Os elementos secundários são:

Ângulos externos — são os ângulos formados por um lado qualquer com o prolongamento de qualquer dos lados contíguos.

Alturas — são os segmentos das perpendiculares traçadas de cada vértice sôbre o lado oposto ou seu prolongamento.

Medianas — são os segmentos que ligam os vértices aos meios dos lados opostos.

Bissetrizes internas — são os segmentos das bissetrizes dos ângulos internos compreendidos entre cada vértice e o ponto de encontro com o lado oposto.

Bissetrizes externas — são os segmentos das bissetrizes dos ângulos externos compreendidos entre os vértices e os pontos de encontro com os prolongamentos dos lados opostos.

Mediatrizes — são as perpendiculares levantadas pelos pontos médios dos lados do triângulo.

Perímetro — É a soma dos lados.

De um modo geral, denominamos *ceviana*, qualquer segmento de reta que liga um vértice do triângulo a um ponto qualquer do lado oposto. Assim sendo, as alturas, medianas e bissetrizes internas, são *cevianas* do triângulo.

CLASSIFICAÇÃO DOS TRIANGULOS

Com relação aos lados, os triângulos podem ser:

Equilátero: lados iguais (tres ângulos iguais; também chamado equiângulo).

Isosceles — dois lados iguais e um diferente (o lado desigual, geralmente é a *base*. Dois ângulos iguais e um diferente).

Escaleno: três lados diferentes.

Com relação aos ângulos, os triângulos podem ser:

Acutângulo — o que tem tres ângulos agudos.

Retângulo — o que tem um ângulo reto.

Obtusângulo — o que tem um ângulo obtuso.

No triângulo *equilátero* as alturas, bissetriz e mediana traçadas do mesmo vértice, coincidem.

No triângulo *isosceles*, apenas ocorre aquela coincidência com as cevianas relativas ao lado diferente.

No triângulo *retângulo* os lados teem nomes especiais; os lados que formam o ângulo reto, são os *catetos* e o lado oposto ao ângulo reto é a *hipotenusa*

CONGRUÊNCIA DE TRIANGULOS

1.º caso

Dois triângulos são congruentes, ou ***iguais por superposição***, quando teem um lado igual, adjacente a dois ângulos respectivamente iguais. (ALA; Ângulo, Lado e Ângulo).

2.º caso

Dois triângulos são congruentes, quando teem um ângulo igual compreendido entre lados iguais respectivamente (LAL; Lado, Ângulo e Lado).

3.º caso

Dois triângulos são congruentes quando teem os tres lados iguais (LLL; Lado, Lado e Lado).

Tratando-se de triângulos retângulos, além dos três casos apresentados e que, por serem gerais, se aplicam à êles, existem ainda os seguintes: 1º) ALA 2º) LAL 3º) LLL

4º) Dois triângulos retângulos são congruentes quando têm a hipotenusa igual e um cateto igual.

5º) Dois triângulos retângulos são congruentes, quando têm hipotenusa igual e um ângulo agudo igual.

Teorema 1

Em qualquer triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois e maior que sua diferença.

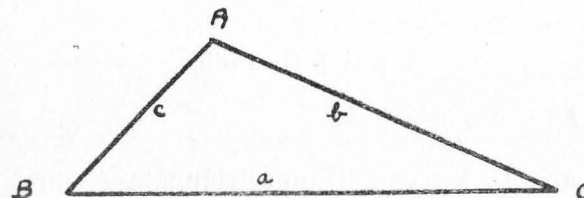


FIG. 1

Na figura 1

a, *b* e *c* — lados do triângulo.

Relação

$$a < b + c \text{ e } c > a - b$$

Teorema 2

Em qualquer triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Na figura 1, o lado a é evidentemente, o maior; então o ângulo A é o maior.

Teorema 3 (Lei angular de Tales)

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.

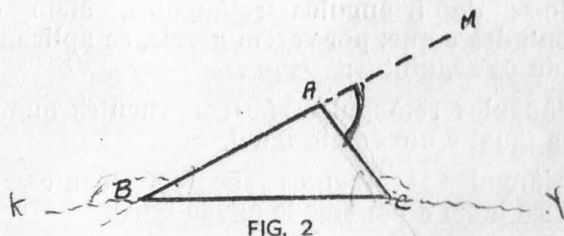


FIG. 2

Na figura 2,

A, B e C — ângulos do triângulo.

Relação

$$A + B + C = 180^\circ$$

Coralario 1

Cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos internos não adjacentes.

Na figura 2

MAC é um ângulo externo.

Relação

ângulo MAC = B + C

Corolário 2

Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

Relação

ângulo B + ângulo C = 90°

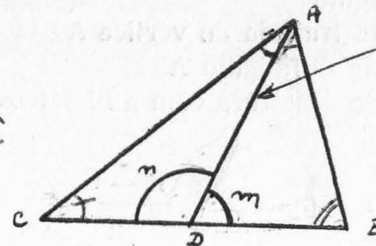
Teorema 4

A bissetriz interna de um ângulo de um triângulo forma com o lado oposto dois ângulos cuja diferença é igual à diferença entre os outros dois ângulos do triângulo.

$\hat{n} = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{B}$

$\hat{m} = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{C}$

$\hat{n} - \hat{m} = \hat{B} - \hat{C}$



$\hat{n} - \hat{m} = \hat{B} - \hat{C}$

FIG. 3

Na figura 3

ABC — triângulo

AD — bissetriz do ângulo A

m e n — ângulos formados pela bissetriz com o lado BC

Relação

n — m = B — C

Teorema 5

O ângulo formado pela bissetriz interna e pela altura que partem do mesmo vértice de um ângulo de um triângulo é igual à semi-diferença dos outros dois ângulos do triângulo.

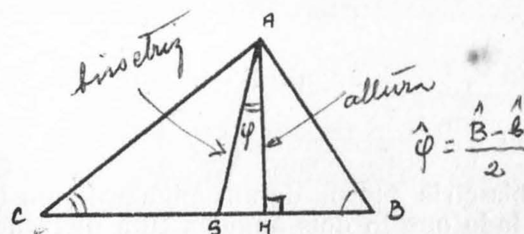


FIG. 4

Na figura 4

ABC — triângulo

AH — altura traçada do vértice A

AS — bissetriz do ângulo A

SAH — ângulo da altura com a bissetriz

Relação

$$\text{ângulo SAH} = \frac{B - C}{2}$$

Teorema 6

A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo forma dois ângulos com a hipotenusa, sendo cada um o dôbro de cada um dos ângulos agudos do triângulo retângulo.

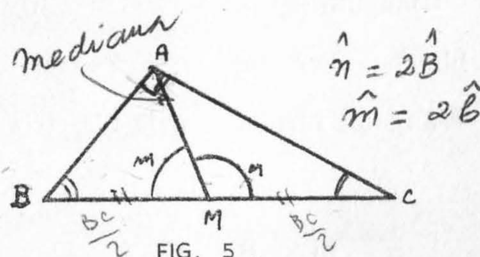


FIG. 5

Na figura 5

ABC — triângulo retângulo

AM — mediana relativa à hipotenusa

m e n — ângulos da mediana com a hipotenusa.

Relação

$$n = 2B \quad \text{e} \quad m = 2C$$

Teorema 7

O ângulo formado pelas bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo é igual a um ângulo reto (90°) mais a metade do terceiro ângulo.

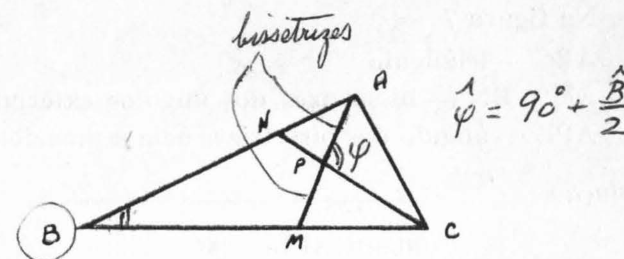


FIG. 6

Na figura 6

ABC — triângulo

CN e AM — bissetrizes dos ângulos A e C

APC — ângulo formado pelas bissetrizes de A e C.

Relação

$$\text{ângulo APC} = 90^\circ + \frac{B}{2}$$

Teorema 8

O ângulo formado pelas bissetrizes externas de dois ângulos externos de um triângulo é igual a um ângulo reto (90°) menos a metade do terceiro ângulo.

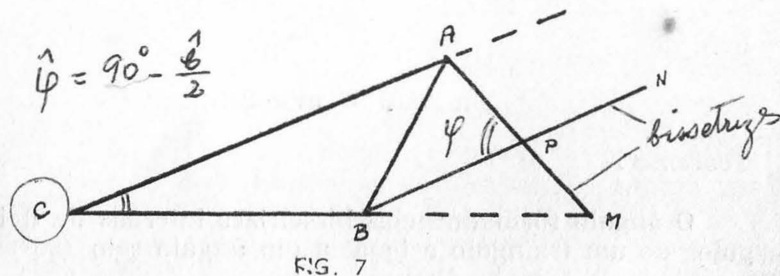


FIG. 7

Na figura 7

ABC — triângulo

AM e BN — bissetrizes dos ângulos externos em A e B

APB — ângulo das bissetrizes acima mencionados.

Relação

$$\text{ângulo APB} = 90° - \frac{C}{2}.$$

Teorema 9

O ângulo das altura e mediana relativas à hipotenusa é igual à diferença entre os ângulos B e C.

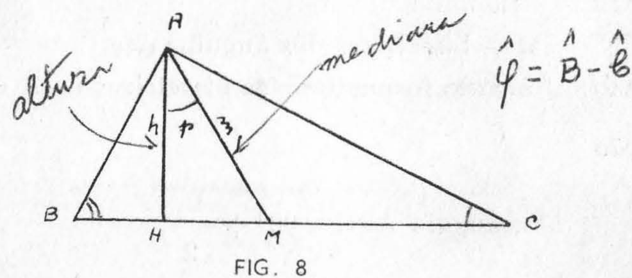


FIG. 8

Na figura 8

ABC — triângulo retângulo

AH — altura relativa à hipotenusa

AM — mediana relativa à hipotenusa

p — ângulo da altura com a mediana.

Relação

$$\text{ângulo p} = \text{ângulo B} - \text{ângulo C}$$

Teorema 10

O ângulo da altura com a bissetriz relativas à hipotenusa é igual à semi diferença dos ângulos da base.

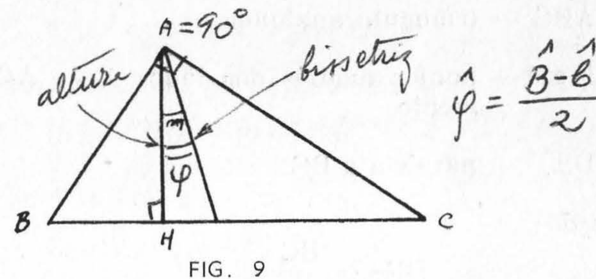


FIG. 9

Na figura 9

ABC — triângulo retângulo; A = 90°

AH — altura relativa à hipotenusa

AN — bissetriz do ângulo reto A

$\hat{m}$ — ângulo da altura com a bissetriz

Relação

$$\text{ângulo m} = \frac{\text{ângulo B} - \text{ângulo C}}{2}$$

Teorema 11

A reta que une os meios dos lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado e igual à sua metade.

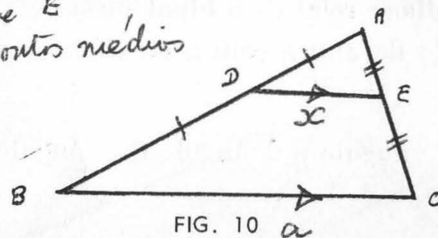


FIG. 10

Na figura 10

ABC — triângulo qualquer

E e D — pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente

DE — paralela a BC

Relação:

$$DE = \frac{BC}{2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Pode-se construir um triângulo tendo como lados, segmentos de 5 cm; 9 cm e 14 cm?

RESP.: Não; um lado não é menor que a soma dos outros dois

2) Calcular os lados de um triângulo isosceles cujo semi-perímetro mede 7,5 m e cuja soma dos seus lados iguais é o quádruplo da base.

Se o semi-perímetro é 7,5 m é porque o perímetro é $2 \times 7{,}5 = 15$ m. O perímetro de um triângulo isósceles pode ser expresso por

$$a + 2b$$

que no caso é 15 m. Então

$$a + 2b = 15$$

O problema diz que a soma dos lados iguais (b) é o quádruplo da base; então

$$2b = 4a \quad e \quad b = 2a$$

Então

$$a + 4a = 15 \quad e \quad a = 3 \text{ m}.$$

Os lados iguais são pois (juntos)

$$15 \text{ m} - 3 \text{ m} = 12 \text{ m} \quad e$$

cada lado valerá

$$12 \div 2 = 6 \text{m}$$

3) No triângulo ABC, o ângulo A mede 50°. Calcular os outros dois ângulos do triângulo cuja diferença é 40°

O *teorema 3* diz que:

$$A + B + C = 180°$$

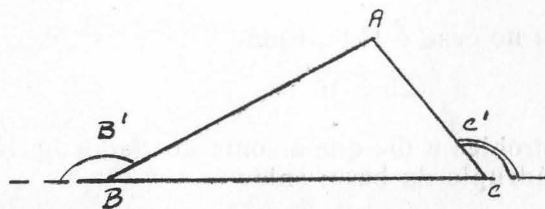
Se A = 50°

$$B + C = 130° \quad e \text{ como} \quad B - C = 40°$$

Segue-se que

$$B = 85° \quad e \quad C = 45°$$

4) Calcular os ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que a soma de seus ângulos externos B' e C' é igual a 230° e que a diferença entre os ângulos B e C é igual a 10°.



O problema diz que B' e C', ângulos externos, somados dão:

$$B' + C' = 230° \quad (1) \text{ e que}$$

$$B - C = 10° \quad (2)$$

Considerando que $B' = 180° - B$ e que $C' = 180° - C$, vem, depois de substituirmos êsses valores em (1)

$$180° - B + 180° - C = 230°$$

$$360° - 230° = B + C$$

$$130° = B + C$$

Como

$$B - C = 10°$$

segue-se que

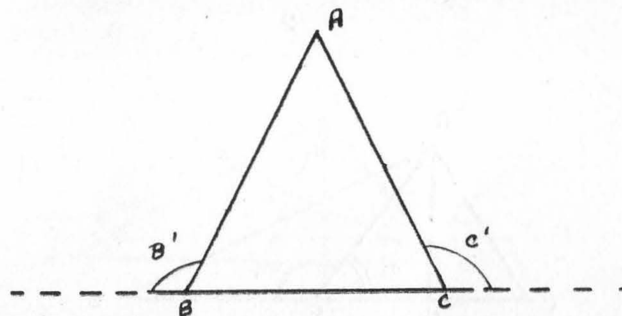
$$B = 70° \text{ e } C = 60°$$

Consequentemente

$$A = 180° - (B + C) =$$

$$= 180° - 130° = 50°$$

5) Num triângulo isosceles o ângulo do vértice mede 50°. Calcular os ângulos externos da base.



O triângulo sendo isosceles, os ângulos B e C, são iguais.

Como

$$A + B + C = 180° \quad \text{ou}$$

$$A + B + B = 180° \quad \text{ou}$$

$$50° + 2B = 180° \quad \text{ou} \quad B = 65°$$

Então

$$C = 65°$$

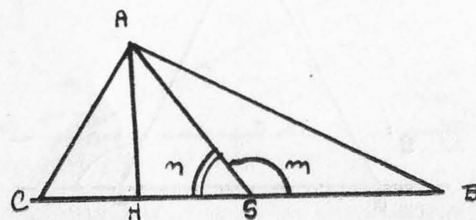
Os ângulos B' e C', como suplementos de B e C respectivamente, valem

$$B' = C' = 180° - B = 180° - 65° = 115°$$

6) Num triângulo ABC, o ângulo HAS formado pela altura AH com a bissetriz AS é de 10°. Calcular os ângulos internos do triângulo, sabendo que a diferença entre os internos B e C é a terça parte de A.

O *teorema* 5 nos permite escrever

$$\text{ângulo HAS } \frac{B-C}{2}$$



$$10 = \frac{B-C}{2} \quad \text{e} \quad B - C = 20^\circ$$

O problema diz que

$$B - C = \frac{1}{3} A, \quad \text{então}$$

$$\frac{1}{3} A = 20^\circ \quad \text{e} \quad A = 60^\circ$$

A lei angular de Tales diz que

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$60^\circ + B + C = 180^\circ \quad \text{ou}$$

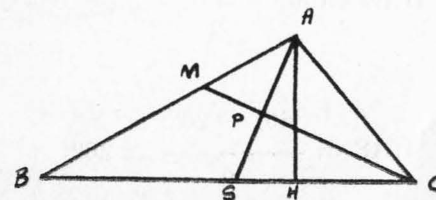
$$B + C = 120^\circ$$

Sendo

$$B - C = 20^\circ \quad \text{teremos}$$

$$B = 70^\circ \quad \text{e} \quad C = 50^\circ$$

7) No triâgulo ABC, o ângulo que as bissetrizes internas AS e CM formam entre si é de 120°. Calcular o ângulo formado pela altura AH com a bissetriz AS, sabendo que o ângulo A do triângulo é o quíntuplo do ângulo C.



O *teorema* 7 diz que

$$\text{ângulo APC} = 90^\circ + \frac{B}{2}$$

No caso do problema

$$120^\circ = 90^\circ + \frac{B}{2}$$

$$\frac{B}{2} = 30^\circ \quad \text{e} \quad B = 60^\circ$$

Sabemos que

$$A + B + C = 180^\circ$$

De acôrdo com os dados do problema

$$A = 5\,C \text{ e então:}$$

$$5\,C + 60^\circ + C = 180^\circ \quad \text{ou}$$

$$6\,C = 120^\circ \text{ e } C = 20^\circ$$

Finalmente

$$A = 5\,C = 100^\circ$$

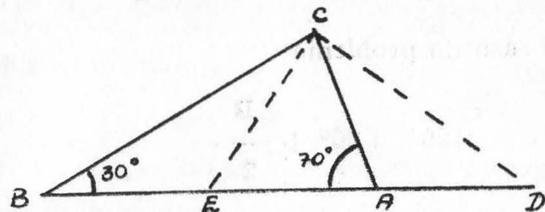
O ângulo

$$HAS \text{ sendo } \frac{B - C}{2}$$

temos:

$$HAS = \frac{60^\circ - 20^\circ}{2} = 20^\circ$$

8) Sendo dado o triângulo ABC, tal que $B = 30^\circ$, $C = 80^\circ$, transportam-se sôbre AB, os comprimentos AD e AE, iguais a AC. Depois ligam-se os pontos E e D a C. Calcular os ângulos ADC e BEC.



C. Naval — 1959.

De acôrdo com os dados do problema os triângulos ECA e CAD, são isosceles.
Temos então que

$$AEC + ECA = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

Mas

$$AEC = ECA \quad \text{então}$$

$$AEC + AEC = 110^\circ \quad \text{e}$$

$$AEC = 55^\circ$$

O ângulo BEC é suplemento do ângulo AEC, então

$$BEC = 180^\circ - AEC = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

Por outro lado o ângulo CAD é suplemento do ângulo EAC (70°)

Então

$$CAD = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

Temos que

$$ACD = ADC \quad \text{e também:}$$

$$ACD + ADC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$2\,ADC = 70^\circ \quad \text{e}$$

$$ADC = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

9) No triângulo retângulo ABC a bissetriz do ângulo reto faz com a hipotenusa dois ângulos cuja diferença é 40°. Calcular os ângulos agudos do triângulo.

O *teorema 4* diz que

$$m - n = B - C \quad \text{ou}$$

$$40 = B - C$$

Atendendo a que $B + C = 90^\circ$, por ser retângulo o triângulo, teremos

$$B - C = 40^\circ \quad \text{e}$$

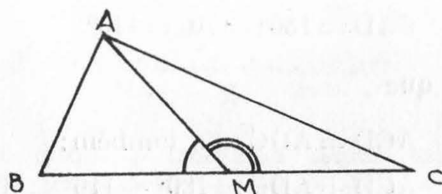
$$B + C = 90^\circ$$

cuja solução dá

$$B = 65^\circ \quad \text{e} \quad C = 25^\circ$$

10) Num triângulo retângulo ABC, a diferença entre os ângulos agudos é de 38°. Calcule os dois ângulos formados pela hipotenusa BC com a mediana AM relativa à hipotenusa.

E.N.C. Dutra — 1953



O problema diz que

$$B - C = 38°$$

Já vimos que

$$B + C = 90° \text{ (no triângulo retângulo)}$$

Essas duas equações dão

$$B = 64° \text{ e } C = 26°$$

Como

$$AM = \frac{a}{2}$$

os triângulos MAB e MAC são isósceles. O ângulo B sendo 64° o ângulo BAM também será 64° e o ângulo AMB, terá para valôr:

$$AMB = 180° - 2 \times 64° = 52°$$

Do mesmo modo, o ângulo C, sendo igual ao ângulo MAC, ambos valem 26° e o ângulo AMC, valerá:

$$AMC = 180° - 2 \times 26 = 128°$$

O resultado poderia ter sido obtido se achássemos o suplemento do ângulo AMB.

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) Com os segmentos de 8m 5m e 12m, pode-se construir um triângulo?

RESP.: Sim, porque $12 < 8 + 5$

2) Os tres ângulos de um triângulo medem em graus, respectivamente $x + 36°$, $2x - 15°$ e $3x - 39°$. Calcular os tres ângulos.

RESP.: 51°; 60° e 69°

3) Num triângulo escaleno, cada ângulo agudo excede o precedente de 10°. Calcular os ângulos do triângulo.

RESP.: 50° 60' e 70°

4) Calcular os lados de um triângulo isosceles cujo semi-perímetro é 12m, sabendo que a soma da base com um dos outros dois lados é igual ao triplo do terceiro lado.

RESP.: 6m; 6m e 12m.

5) No triângulo ABC o ângulo A mede 45°. Calcular os ângulos desse triângulo, sabendo que o ângulo B é o quádruplo do ângulo C.

RESP.: 27° e 108°

6) Calcular os ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que a soma dos externos B' e C' é igual a 240° e que o interno B é o triplo do interno C.

RESP.: A = 60°; B = 90° e C = 30°

7) Calcular os ângulos de um triângulo ABC sabendo que o externo B' excede C' de 30° e que o interno C é o triplo de B.

RESP.: A = 120°; B = 15° e C = 45°

8) Um ângulo externo da base de um triângulo isósceles vale 105°. Calcular o ângulo do vértice.

RESP.: 30°

9) Num triângulo retângulo, um ângulo agudo é o dobro do outro. Calcular os ângulos agudos do triângulo.

RESP.: 30° e 60°

10) Num triângulo isósceles o ângulo do vértice é $^4/_5$ de um ângulo externo da base. Calcular os ângulos dêsse triângulo.

RESP.: A = 120°; B = C = 30°

11) A razão entre os ângulos agudos de um triângulo retângulo é $^2/_3$. Calcular êsses ângulos.

RESP.: 36° e 54°

12) Num triângulo ABC, o ângulo HAS formado pela altura AH com bissetriz interna AS é de 10°. Calcular os ângulos internos do triângulo sendo o ângulo C igual a $^2/_3$ do ângulo B.

RESP.: A = 80; B = 60° e C = 40°

13) No triângulo ABC calcular o ângulo formado pela altura AH com a bissetriz AS, quando a diferença entre os ângulos que a bissetriz AS forma com o lado oposto BC é de 20°.

RESP.: 10°

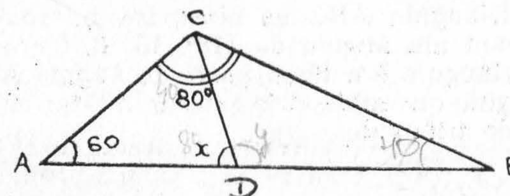
14) Num triângulo retângulo isósceles calcular o ângulo que formam as bissetrizes internas de dois ângulos desiguais.

E.N.C. Dutra — 1951 RESP.: 112° 30'

15) Num triângulo isosceles ABC o ângulo externo em (A) é igual a um quinto da soma dos outros dois ângulos externos (em B e em C). Calcular os ângulos internos dêsse triângulo.

E.N.C. Dutra — 1953 RESP.: 120°; 30°; 30°

16) Na figura abaixo CD é a bissetriz do ângulo ACB. Qual o valor do ângulo x



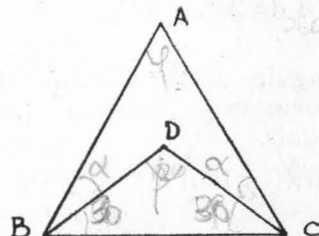
E.P.C.Ar. — 1951 RESP.: x = 80°

17) O ângulo das bissetrizes ~~das bissetrizes~~ dos ângulos da base de um triângulo isosceles é igual ao triplo do ângulo do vértice. Qual o valôr dêsse ângulo em graus.

C. Naval — 1959 RESP.: 36°

18) Na figura ABC e DBC são triângulos isósceles. O ângulo BAC é o quádruplo do ângulo ACD. Calcular

o ângulo BAC sabendo-se que a soma dos ângulos da base do triângulo DBC vale 60°.



C. Naval — 1961 RESP.: 80°

19) Os ângulos internos de um triângulo medem 80°, 40° e 60°. Calcular os ângulos internos do triângulo formado pelos suportes das bissetrizes externas do triângulo dado.

C. Naval — 1963 RESP.: 50°; 60° e 70°

20) No triângulo ABC as bissetrizes internas AS e CM, formam um ângulo de 118° 15' 37" e o ângulo C do triângulo é a têrça parte do ângulo A. Calcular o ângulo que a bissetriz externa AT faz com a altura AH do triângulo.

RESP.: 102° 49' 31",25

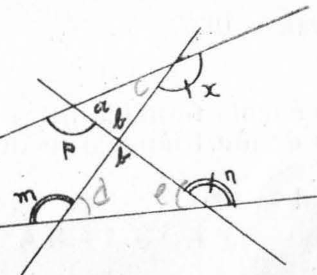
21) Num triângulo retângulo ABC a mediana AM faz com a hipotenusa dois ângulos cuja diferença é de 40°. Calcular os ângulos agudos do triângulo.

RESP.: 55° e 35°

22) Num triângulo retângulo a altura e a bissetriz do ângulo reto formam entre si um ângulo de 20°. Calcular os ângulos agudos do triângulo retângulo.

RESP.: 25° e 65°

23) Na figura, exprimir o ângulo x em função do ângulo m, n e p.

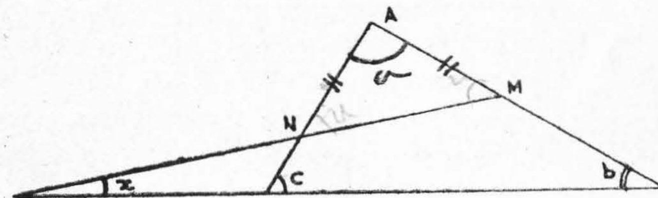


RESP.: $x = m + n - p$

24) Num triângulo ABC, o ângulo B = 35° e o ângulo C = 75°, as alturas relativas aos lados AB e AC cortam-se em I. Calcular o ângulo BIC.

RESP.: 110°

25) Na figura os segmentos AM e AN são iguais. Exprimir o ângulo x em função de a e b.



RESP.: $x = \frac{a - b}{2}$

26) Num triângulo acutângulo isosceles um ângulo é o quádruplo do outro. Qual o menor ângulo do triângulo?

C. Naval — 1957 RESP.: 20°

27) Qual o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos agudos de um triângulo retângulo?

C. Naval — 1957 RESP.: 135°

PARALELAS

Duas *retas* são *paralelas* quando, situadas no mesmo plano, não têm ponto comum.

Teorema 1

Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.

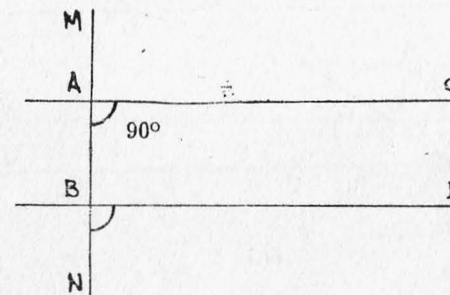


FIG. 1

Na figura 1

AC e BD — retas perpendiculares à MN.

Conclusão

AC e BD são retas paralelas.

Postulado de Euclides

Por um ponto fora de uma reta só podemos traçar uma paralela a essa reta.

Conseqüência

Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

Concluimos que: desde que várias retas sejam paralelas a uma reta dada, são paralelas entre si e constituem um *feixe de paralelas*.

Teorema 2

Quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal qualquer, os quatro ângulos agudos são iguais entre si, bem como os quatro obtusos.

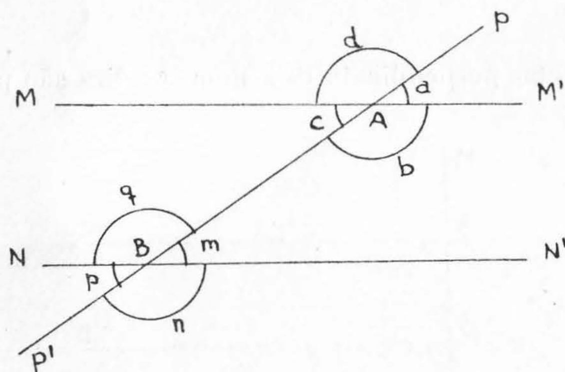


FIG. 2

Na figura 2

M M' e N N' — retas paralelas

PP' — transversal

a, c, p, m — ângulos agudos (iguais)

b, d, n, q — ângulos obtusos (iguais)

Esses ângulos recebem as seguintes denominações:

alternos internos: b e q; c e m (são iguais)
alternos externos: a e p; d e n (são iguais)
colaterais internos: b e m; c e q (suplementares)
colaterais externos: a e n; d e p (suplementares)
correspondentes: a e m; b e n; d e q; c e p (são iguais)

É preciso notar que as relações acima estabelecidas só se verificam se as retas MM' e NN' forem paralelas. No caso de não serem paralelas, os nomes dos ângulos são os mesmos mas, repetimos, não são iguais: os alternos externos; ou os alternos internos nem os correspondentes, assim como os colaterais internos ou externos, não são suplementares.

Teorema 3

Dois segmentos paralelos compreendidos entre retas paralelas são iguais.

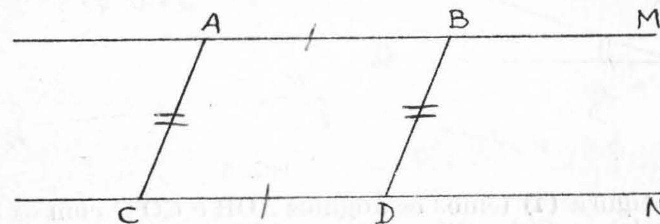


FIG. 3

Na figura 3

M e N são duas retas paralelas

AC e BD — segmentos paralelos compreendidos entre paralelas.

Conclusão

AC = BD.

APLICAÇÃO DA TEORIA DOS PARALELOS AOS ÂNGULOS

Ângulos de lados paralelos

Teorema 4

Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são iguais quando agudos e suplementares, quando um é agudo e o outro obtuso.

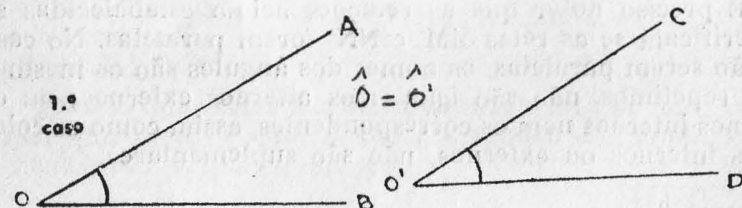


FIG. 4

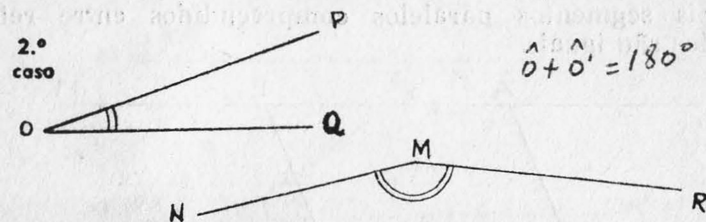


FIG. 5

Na figura (4) temos os ângulos AOB e CO'D com os lados OA paralelo a O'C e OB paralelo a O'D. Como os ângulos são menores que 90°, são agudos.

Relação

ângulo AOB = ângulo CO'D

Na figura 5 temos os ângulos POQ e NMR com os lados OP e MN paralelos, assim como os lados OQ e MR. Como um dos ângulos é agudo (POC) e o outro obtuso (NMR) temos a

Relação

ângulo POQ + ângulo NMR = 180°

Ângulos de lados perpendiculares

Teorema 5

Dois ângulos de lados respectivamente perpendiculares são iguais se ambos forem agudos e suplementares se um fôr agudo e outro obtuso.

1.º caso

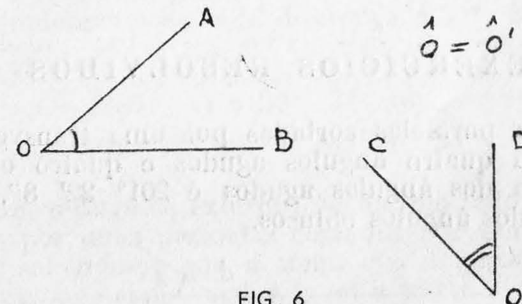


FIG. 6

2.º caso

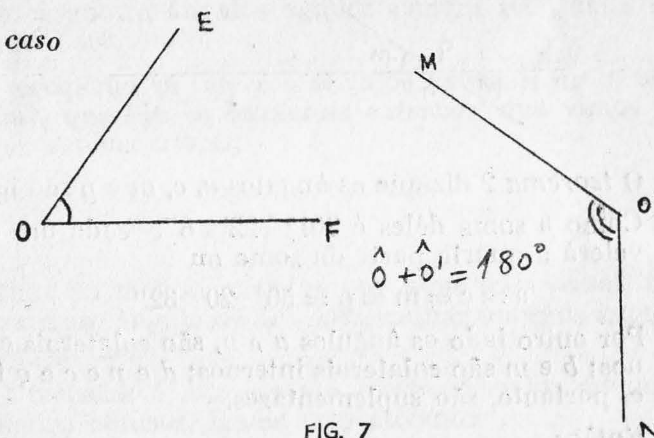


FIG. 7

Os ângulos AOB e CO'D da figura 6 têm os lados AO e CO' perpendiculares, assim como os lados OB e O'D. Como são ambos agudos temos a

Relação

ângulo AOB = ângulo CO'D

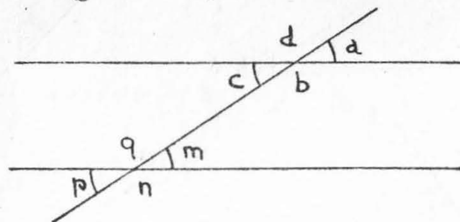
No caso da figura 7 os ângulos EOF e MO'N teem os lados OE e O'M perpendiculares, assim como os lados OF e O'N. Como o primeiro é agudo e o segundo obtuso, temos a

Relação

ângulo EOF + ângulo MO'N = 180°

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Duas paralelas cortadas por uma transversal, formam quatro ângulos agudos e quatro obtusos. A soma dos ângulos agudos é 201° 22' 8". Calcular um dos ângulos obtusos.



O *teorema 2* diz que os ângulos *a*, *c*, *m* e *p* são iguais.

Como a soma dêles é 201° 22' 8", cada um dêles valerá a quarta parte da soma ou

a = c = m = p = 50° 20' 32"

Por outro lado os ângulos *a e n*, são colaterais externos; *b* e *m* são colaterais internos; *d* e *p* e *c* e *q* idem e, portanto, são suplementares.

Então:

a + n = b + m = d + p = c + q = 180°

(Suplementos de ângulos iguais; *a*, *c*, *m* e *p*) e

b = d = n = q = 180° — 50° 20' 32" =
= 129° 39' 28"

2) Duas paralelas cortadas por uma transversal, formam ângulos internos do mesmo lado dos quais um excede o outro de 30° 27'. Determinar esses ângulos.

Internos do mesmo lado, são *colaterais internos*, que vimos serem suplementares.

Então o problema passa a ser: "determinar dois ângulos suplementares, cuja diferença é 30° 27'

Assim sendo:

x — (180 — x) = 30° 27' ou

x = 105° 13' 30" e 74° 46' 30"

3) Calcular os ângulos externos do mesmo lado, formados por duas paralelas cortadas por uma transversal, sabendo-se que a soma dos ângulos agudos formados por essas retas é igual a 160°.

Se os quatro ângulos agudos somam 160°, cada um valerá 40°.

O problema se refere a ângulos externos do mesmo lado, que são os *colaterais externos*, que vimos serem suplementares.

Então, o outro ângulo procurado é

180° — 40° = 140°

4) Duas paralelas, cortadas por uma transversal, formam um ângulo de 37°. Determinar todos os ângulos da figura.

O *teorema 4* diz que são quatro ângulos agudos e quatro obtusos, iguais respectivamente.

Pelos dados do problema, quatro valem 37°, resta-nos determinar os outros quatro, que são iguais. No problema *1* vimos que um agudo e um obtuso são suplementares, então os obtusos serão de

180° — 37° = 143° cada um.

5) Duas paralelas, cortadas por uma transversal, formam ângulos, alternos internos expressos em graus por $5x - 4°$ e $3x + 2°$, respectivamente. Determinar êsses ângulos.

Vimos que os ângulos alternos-internos são iguais.

Então

$$5x - 4° = 3x + 2° \quad \text{e}$$
$$x = 3°$$

Os ângulos serão:

5 x 4°, substituindo x por 3, isto é

$$5 \times 3 - 4° = 11°$$

A substituição de x, por seu valor, em $3x + 2°$, daria 11°, visto que os ângulos são iguais.

6) Duas retas, cortadas por uma transversal, formam ângulos correspondentes expressos em graus por $2° + 3x$ e $4x - 7°$, respectivamente. Para que as retas sejam paralelas, quanto deve medir êsses ângulos?

Para que as retas sejam paralelas, os *ângulos correspondentes* precisam ser iguais.

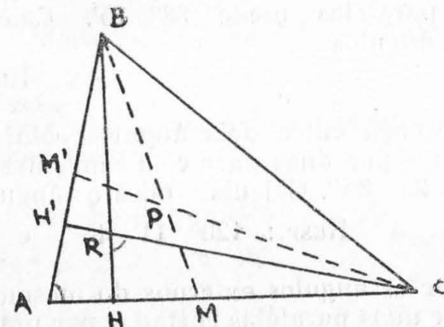
Então:

$$2° + 3x = 4x - 7° \text{ e } x = 9°$$

E o ângulo será

$$2° + 3° \times 9 = 29°$$

7) As bissetrizes dos ângulos B e C de um triângulo acutângulo ABC formam um ângulo de 128°. Determinar os ângulos formados pelas alturas traçadas dos vértices B e C.



Na figura, BM e CM' são as bissetrizes dos ângulos B e C, que formam o ângulo BPC = 128°.

BH e CH' são as alturas traçadas dos vértices B e C, cujos ângulos BRC e HRC, queremos calcular.

Vimos, no capítulo, triângulos, que

$$\text{ângulo BPC} = 90° + \frac{A}{2} \quad \text{e}$$

$$128° = 90° + \frac{A}{2} \quad \text{e}$$

$$A = 76°$$

Os ângulos BAC e HRC têm os lados perpendiculares (BH perpendicular a AC e CH' perpendicular a AB).

O *teorema* 5 diz que esses ângulos são iguais; então

$$HRC = A = 76°$$

O ângulo BRC será

$$180° - 76° = 104°$$

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) Um dos ângulos formado por uma transversal com duas paralelas mede 38° 15'. Calcular todos os outros ângulos.

RESP.: 141° 45'

2) A diferença entre dois ângulos colaterais internos formados por duas paralelas com uma transversal é de 60° 23' 32". Calcular todos os ângulos da figura.

RESP.: 120° 11' 46" e 59° 48' 14"

3) Calcular os ângulos externos do mesmo lado formados por duas paralelas cortadas por uma transversal, sabendo-se que a soma dos ângulos agudos é de 204°.

RESP.: 51° e 129°

4) Duas paralelas cortadas por uma transversal, formam um ângulo de 153° 29' 15". Determinar os outros ângulos da figura.

RESP.: 26° 30' 45"

5) Duas paralelas cortadas por uma transversal, formam dois ângulos colaterais internos expressos em graus por $5x + 25°$ e $2x - 20°$, respectivamente. Calcular os ângulos da figura.

RESP.: 30° e 150°

6) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam dois ângulos colaterais internos que podem ser representados por $3x - 50°$ e $2x + 10°$. Calcule o menor dêsses ângulos.

I.E. — 1951 RESP.: 82°

7) Dois ângulos são colaterais internos e um dêles tem mais 64° 42' que o outro. Calcular os dois ângulos.

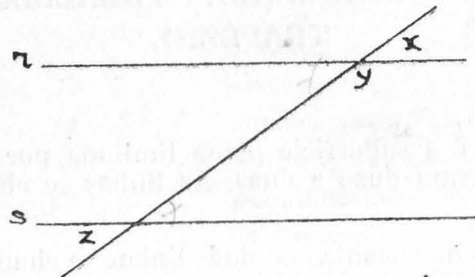
RESP.: 122° 21' e 57° 39'

8) No triângulo ABC o ângulo que as bissetrizes AS e CM formam entre si é de 120°. Calcular os ângulos que as alturas traçadas dos vértices A e C fazem entre si.

RESP.: 60° e 120°

9) As retas r e s são paralelas. Calcule os ângulos x, y e z, sabendo que

$$2x + y + z = 240°$$



I.C. — 1951 RESP.: $x = 30°$; $y = 150°$ e $z = 30°$

POLÍGONOS. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS. DIAGONAIS. PARALELOGRAMOS. TRAPÉZIO.

Polígono é a superfície plana limitada por linhas retas que se encontram duas a duas. As linhas se chamam *lados* do polígono.

Os pontos de encontro de duas linhas se chamam *vértices* do polígono.

Os segmentos de retas que unem dois vértices não consecutivos, são as *diagonais* do polígono. Os polígonos podem ser *regulares* ou *irregulares*; *convexos* ou *não convexos* também chamados *côncavos* e *entrelaçados*

Regulares: são os que têm os lados iguais e os ângulos iguais.

Irregulares: são os que não têm todos os lados iguais ou todos os ângulos iguais.

Convexos: são os que têm todos os ângulos salientes. Tôdas as suas diagonais são interiores.

Não convexos ou côncavo: são os que têm um ou mais ângulos reentrantes. Suas diagonais podem ter partes interiores e parte exteriores ou totalmente exteriores.

Entrelaçadas: são os que têm um dos seus lados cortado por outro.

Um polígono *entrelaçado é sempre* não conexo.

Os polígonos se caracterizam também pelo número de seus lados e muitos dêles têm nomes especiais, dependendo daquele número de lados. Assim é que o polígono de:

3 lados é o triângulo
4 " " " quadrilátero
5 " " " pentágono
6 " " " hexágono
7 " " " heptágono
8 " " " octógono
9 " " " eneágono
10 " " " decágono
11 " " " undecágono
12 " " " dodecágono
15 " " " pentadecágono
20 " " " icoságono.

No caso de ter um número de lados diferente dos citados não tem nome especial; são denominados: polígono de treze lados; polígono de quarenta lados; etc. No caso do polígono ter todos os lados iguais é dito *equilátero*. Se apenas os ângulos forem iguais, é chamado *equiângulo*.

Ângulo interno de um polígono ou *ângulo de um polígono*, é o ângulo formado por dois lados consecutivos do polígono, na superfície por êle limitada. Seu valôr, no caso do polígono ser equiângulo é:

(ângulo interno) $i = \dfrac{180\,(n-2)}{n}$, sendo *n* o número de lados do polígono.

Ângulo externo de um polígono é o ângulo formado por um de seus lados e o prolongamento do lado adjacente.

Seu valor, no caso do polígono ser equiângulo é

$$(\text{ângulo externo})\ e = \frac{360^o}{n}$$, sendo n o número de lados do polígono.

Teorema 1

A soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo é igual a tantas vêzes dois ângulos retos (180°) quantos são os lados menos dois.

Relação

$$S_i = 180\ (n - 2)$$

Teorema 2

Em *todo* polígono convexo a soma dos ângulos externos é igual a quatro ângulos retos.

Relação

$$S_e = 360^o$$

Teorema 3

Em qualquer polígono a soma dos ângulos interno e externo é 180°.

Relação

$$i + e = 180^o$$

Teorema 4

A soma de todos os ângulos externos e internos de um polígono é igual ao número de lados do polígono, multiplicado por dois ângulos retos.

Relação

$$S_i + S_e = n \times 180^o$$

Teorema 5

O número de diagonais distintas de um polígono é igual à metade do número de lados multiplicado pelo número de lados menos três.

Relação

$$(\text{n.}^o\ \text{de diagonais})\ D = \frac{n\ (n - 3)}{2}$$

Teorema 6

De um mesmo vértice podemos traçar tantas diagonais quantos forem os lados do polígono, menos três.

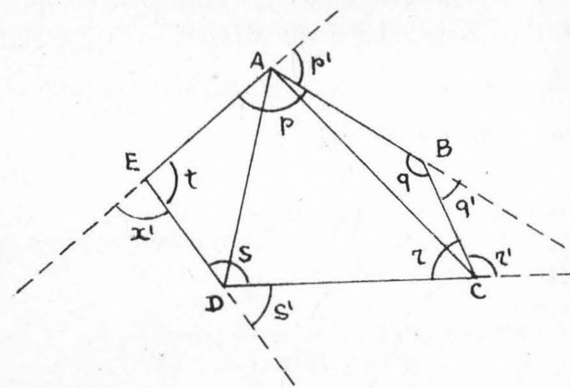


FIG. 1

Na figura 1

ABCDE — pentágono irregular convexo.
A, B, C, D, E — vértices do polígono
AB, BC, CD, DE, EA — lados do polígono

p, q, r, s, l — ângulos internos do polígono
p', q', r', s', t' — ângulos externos do polígono
AD, AC — diagonais traçadas do vértice A.

Relação

n.º de diagonais de um vértice = n — 3

Polígono não convexo (fig .2)

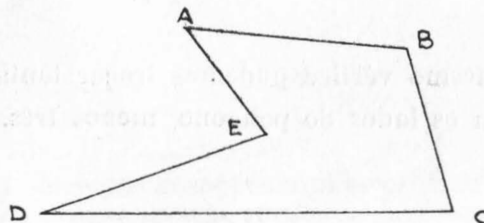
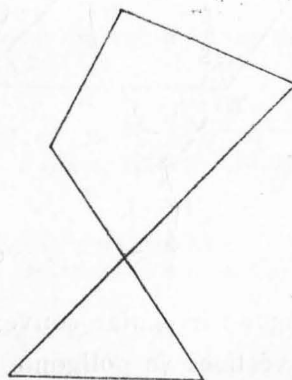


FIG. 2

Polígono entrelaçado (fig. 3)


FIG. 3

QUADRILÁTEROS

Paralelogramo

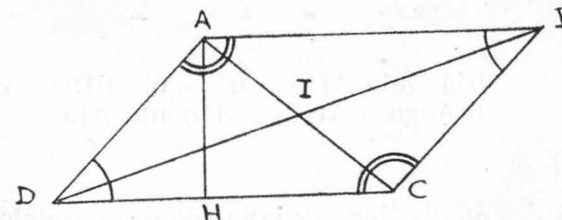


FIG. 4

Na figura 4, temos

ABCD — paralelogramo
AB, BC, CD e AD — lados do paralelogramo
AH — altura do paralelogramo
AC e BD — diagonais do paralelogramo
A, B, C e D — vértices do paralelogramo

I — interseção das diagonais é o centro de simetria do paralelogramo.

Teorema 1

Os lados opostos de um paralelogramo são iguais e os ângulos opostos também.

Relação

lados AB = CD e AD = BC
ângulos A = C e B = D.

Teorema 2

As diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio e são diferentes.

Relação

AI = IC e IB = ID
AC ≠ BD

Teorema 3

Qualquer diagonal de um paralelogramo divide-o em dois triângulos iguais.

Relação

triângulo ADB = triângulo BDC ou
triângulo ADC = triângulo ABC

Teorema 4

A soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos diagonais.

Relação (fig. 4)

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$

O *retângulo* o *losango* e o *quadrado* são paralelogramos especiais, que gozam das propriedades anteriores (*teoremas 1, 2* e *3*) e mais as seguintes:

Retângulo

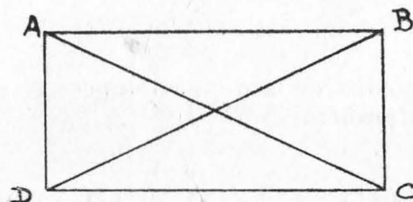


FIG. 5

Na figura 5

ABCD — retângulo

AB, BC, CD e AD — lados do retângulo

A, B, C e D — vértices do retângulo

AC e BD — diagonais (*iguais*)

Ângulos A, B, C e D — retos.

Losango

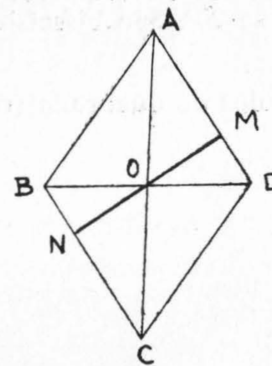


FIG. 6

Na figura 6

ABCD — losango

AB, BC, CD e AD — lados do losango (*iguais*)

AC e BD — diagonais (diferentes e se cortando em ângulo reto. São bissetrizes dos ângulos).

MN — altura do losango

Quadrado

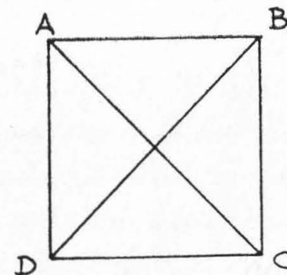


FIG. 7

Na figura 7

ABCD — quadrado

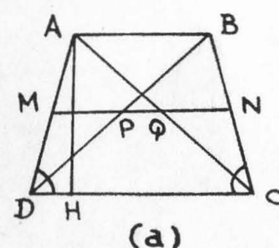
AB, BC, CD, AD — lados do quadrado (iguais)

A, B, C, D — vértices do quadrado

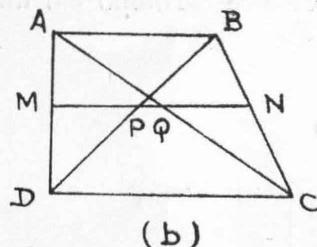
AC e BD — diagonais do quadrado são iguais, e se cortam formando um ângulo de 90°. São bissetrizes dos ângulos do quadrado).

A, B, C, D — ângulos do quadrado (retos)

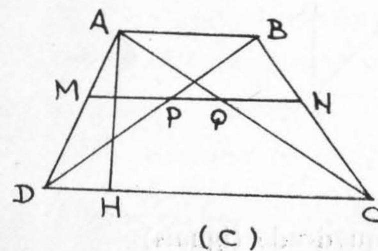
Trapézio



Isosceles



Retângulo



Escaleno

FIG. 8

Na figura 8

Temos os três tipos de trapézio: *Isósceles* (a); *retângulo* (b) é *escaleno* (c).

Em todos

AB e CD — são os bases do trapézio

AD e BC — são as contra-bases (lados não paralelos)

AC e BD — são os diagonais

MN é a *base média* do trapézio expressa por:

$$MN = \frac{AB + DC}{2}$$

Ela divide ao meio as contra-bases.

PQ — segmento de reta que une os meios das diagonais. É paralela às bases AB e CD e tem para valôr

$$PQ = \frac{DC - AB}{2}$$ mediana de EULER.

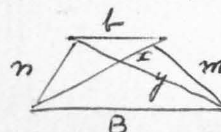
No *trapézio isosceles* (a) as contra-bases são iguais. Os ângulos da base são iguais. $\hat{D} = \hat{C}$ e $\hat{A} = \hat{B}$.

No *trapézio retângulo* (b) uma das contra bases faz ângulos de 90° com as bases AB e CD que são paralelas.

No *trapézio escaleno* (c), as contra bases são diferentes. AH e AD são as alturas dos trapézios.

Teorema 5

A soma dos quadrados das diagonais de um trapézio é igual a soma dos quadrados dos lados não paralelos, mais duas vezes o produto dos lados paralelos.



$x^2 + y^2 = m^2 + n^2 + 2bB$

Relação

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2\ AB \times DC.$$

Teorema 6 (Eüler)

A soma dos quadrados dos lados de um quadrilátero qualquer é igual à soma dos quadrados das diagonais, mais quatro vêzes o quadrado da reta que une o meio das diagonais.

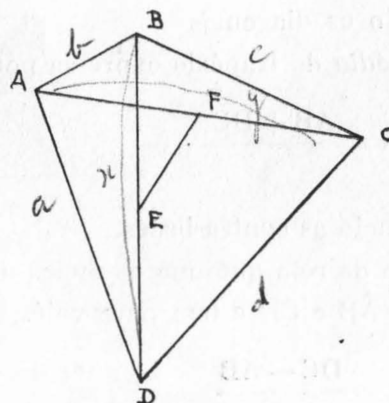


FIG. 9

Na figura 9

ABCD — quadrilátero qualquer.

AB, BC, CD e AD — lados do quadrilátero

AC e BD — diagonais

EF — reta que une os meios das diagonais.

Relação

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4\ EF^2$$

Teorema 7

As diagonais de um pentágono regular se cortam em média e extrema razão.

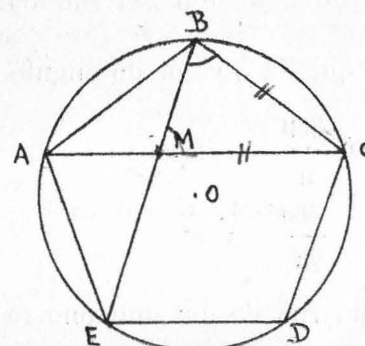


FIG. 10

Na figura 10

ABCDE — pentágono regular

AC e BE — duas de suas diagonais

M — ponto de interseção das diagonais.

Relação

$$MC^2 = AC \times AM \quad \text{e} \quad BC = CM$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) **Quanto mede o ângulo interno de um pentadecágono regular?**

A fórmula que dá o ângulo interno de um polígono é:

$$i = \frac{180\ (n - 2)}{n}; \quad \text{então:}$$

$$i = \frac{180\ (15 - 2)}{15} = \frac{180 \times 13}{15} =$$

$$= 12 \times 13 = 156^\circ$$

2) Quanto mede o ângulo externo de um icoságono regular?

A fórmula que dá o valor do ângulo externo é:

$$e = \frac{360}{n}, \quad \text{então}$$

$$e = \frac{360}{20} = 18^\circ$$

3) O ângulo interno de um polígono regular é $\frac{3}{2}$ do externo. Qual é o polígono?

O problema nos permite escrever:

$$i = \frac{3}{2} \times e \quad \text{ou}$$

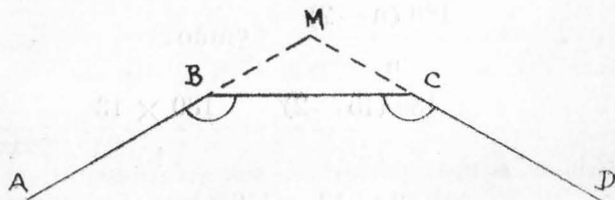
$$\frac{180\,(n-2)}{n} = \frac{3}{2} \times \frac{360}{n} \quad \text{ou}$$

$$180\,(n-2) = \frac{3}{2} \times 360 \quad \text{ou}$$

$$n - 2 = 3 \quad \text{e} \quad n = 5.$$

O polígono é o de cinco lados, isto é, o pentágono.

4) Determinar o valor do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados AB e CD de um dodecágono regular.



Na figura estão representados apenas 3 lados do dodecágono e os prolongamentos dos lados AB e CD, que se encontram em M. Vamos calcular o ângulo AMD.

O ângulo interno do polígono vale:

$$i = \frac{180\,(n-2)}{n} = \frac{180 \times 10}{12} = 150^\circ$$

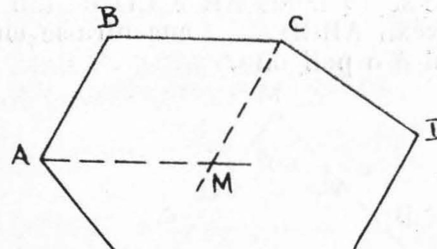
Conseqüentemente o ângulo MBC e MCB, que são iguais, porque o triângulo BMC é isosceles, vale:

$$180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

A lei angular de Thales aplicada ao triângulo BMC dá:

$$\text{ângulo } M = 180^\circ - 2 \times 30^\circ = 120^\circ$$

5) As bissetrizes internas AM e CM dos ângulos de um polígono regular ABCD..., se encontram no ponto M. Calcular o número de lados do polígono, sabendo que o ângulo M é igual ao ângulo interno do polígono.



Na figura, ABCM é um quadrilátero, no qual o ângulo M é igual ao ângulo B (interno). Os ângulos MAB e MCB são metade do ângulo interno do polígono cujo número de lados queremos calcular.

A soma dos ângulos internos do quadrilátero ABCM é 360°. Então

(ângulos) MAB + ABC + BCM + AMC = 360°

$$\frac{i}{2} + i + \frac{i}{2} + i = 360 \quad \text{ou}$$

$$3i = 360° \quad \text{e} \quad i = \frac{360°}{3} = 120°$$

Como

$$i = \frac{180\,(n-2)}{n} \quad \text{teremos}$$

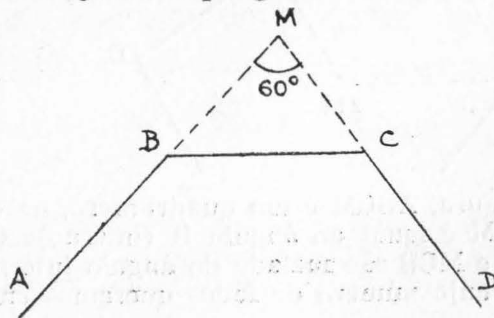
$$120° = \frac{180(n-2)}{n} \quad \text{ou}$$

$$120°n = 180°n - 360° \quad \text{ou} \quad 360° = 60°n \quad \text{e}$$

$$n = \frac{360°}{60°} = 6$$

O polígono é pois o hexágono.

6) **Prolongando-se os lados AB e CD de um polígono regular convexo ABCD .... encontra-se em ângulo de 60°. Qual é o polígono?**



Pelo enunciado do problema, o ângulo M é 60°. Por ser regular o polígono, MB e MC são iguais e o triângulo MBC é, em princípio, isósceles. Sendo assim os ângulos MBC e MCB são iguais e valem juntos (lei angular de Thales).

$$180° - 60° = 120°$$

Cada um deles valerá pois

$$120° \div 2 = 60°$$

Vemos assim que o triângulo MBC é equilátero.

O ângulo interno B ou C do polígono valerá

$$180° - 60° = 120°$$

Teremos então:

$$120° = \frac{180\,(n-2)}{n} \quad \text{e}$$

$$n = 6$$

O polígono é então o hexágono.

7) **Dois polígonos regulares P e Q têm respectivamente n e n + 1 lados. O ângulo interno do polígono P excede o ângulo externo do polígono Q de 95°. Quais são os polígonos.**

O ângulo interno do polígono P é expresso por:

$$i_P = \frac{180\,(n-2)}{n}$$

O ângulo externo do polígono Q é representado por:

$$e_Q = \frac{360}{n+1}$$

Como a diferença entre êles é 95°, teremos:

$$\frac{180\,(n-2)}{n} - \frac{360}{n+1} = 95^\circ \quad \text{ou}$$

$$180\,(n+1)(n-2) - 360\,n = 95\,(n)(n+1) \quad \textbf{ou}$$

$$36\,(n^2 - n - 2) - 72\,n = 19\,n^2 + 19\,n \quad \text{ou}$$

$$17\,n^2 - 127\,n - 72 = 0$$

cujas raizes são:

$$n = 8 \text{ e } n = -\frac{18}{14} \text{ (que não serve)}$$

O polígono P tendo 8 lados o polígono Q terá 8 + 1 ou 9 lados. São, portanto, o octógono e o eneágono.

8) Dois polígonos P e Q são tais que o ângulo externo de P é igual à vigésima parte da soma dos ângulos internos de Q e o ângulo interno de P é o triplo do ângulo externo de Q. Diga quais são êsses polígonos (Thiré).

Chamemos de p e q os números de lados dos polígonos P e Q respectivamente.
O problema diz que:

$$\frac{360}{p} = \frac{1}{20} \times 180\,(q-2) \qquad \text{(A) e}$$

$$\frac{180\,(p-2)}{p} = 3 \times \frac{360}{q} \qquad \text{(B)}$$

As equações (A) e (B) formam um sistema que resolvido dá os valôres de p e q.

Assim, as equações (A) e (B) podem tomar os aspectos:

$$\begin{cases} \dfrac{360}{p} = \dfrac{180\,(q-2)}{20} \quad \text{ou} \\[2ex] \dfrac{180\,(p-2)}{p} = \dfrac{1080}{q} \quad \text{ou} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{p} = \dfrac{q-2}{20} \\[2ex] \dfrac{p-2}{p} = \dfrac{6}{q} \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} 40 = pq - 2p & \text{(C)} \\ pq - 2q = 6p \quad \text{ou} \quad (p-2)\,q = 6p \quad \text{e} \end{cases}$$

$$q = \frac{6p}{p-2} \qquad \text{(D)}$$

Substituindo o valor de q da equação (D), na equação (C) teremos:

$$40 = p \times \frac{6p}{p-2} - 2p \quad \text{ou}$$

$$40 = \frac{6p^2}{p-2} - 2p \quad \text{ou}$$

$$40p - 80 = 6p^2 - 2p^2 + 4p \quad \text{ou}$$

$$4p^2 - 36\,p + 80 = 0 \quad \text{ou}$$

$$p^2 - 9\,p + 20 = 0 \quad \text{e}$$

$$p_1 = 4 \text{ e } p_2 = 5$$

Com êsses valôres em D, vemos:

$$q_1 = \frac{6 \times 4}{4-2} = \frac{24}{2} = 12 \quad \text{e}$$

$$q_2 = \frac{6 \times 5}{5-2} = \frac{30}{3} = 10$$

Os polígonos são pois: quadrado e dodecágono ou pentágono e decágono.

9) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 900°. Calcule o número de diagonais dêsse polígono.

Como queremos saber o número de diagonais, empregamos a fórmula apresentada no início do capítulo.

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \quad (1)$$

Verificamos, então, ser necessário o valor de *n*, número de lados do polígono e para calculá-lo veremos que é dada a soma dos ângulos internos que é:

$S_i = 180(n-2)$, então

$900 = 180(n-2)$ e $n = 7$

Agora então levamos êsse valôr em (1) e teremos:

$$D = \frac{7(7-3)}{2} = 14 \text{ diagonais}$$

10) Qual é o polígono em que o número de lados é igual ao número de diagonais?

Sendo *n* o número de lados e D o de diagonais, o problema nos permite escrever:

$n = D$ ou

$$n = \frac{n(n-3)}{2} \quad \text{ou}$$

$$1 = \frac{n-3}{2} \quad \text{ou}$$

$n = 5$, isto é: o pentágono.

11) Dois polígonos P e Q, teem para número de lados dois números inteiros e consecutivos. A diferença entre os números de diagonais dêsses polígonos é 4. Quais são os polígonos.

Podemos dizer que um polígono tendo *n* lados o outro terá n + 1, lados. O que tem maior número de lados tem mais diagonais então o número de diagonais do que tem n + 1 lados será:

$$D_1 = \frac{(n+1)(n+1-3)}{2} \quad \text{ou}$$

$$D_1 = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

O número de diagonais do de *n* lados é:

$$D_2 = \frac{n(n-3)}{2}$$

O problema diz que

$D_1 - D_2 = 4$, então

$$\frac{(n+1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 4 \quad \text{ou}$$

$n^2 - n - 2 - n^2 + 3n = 8$ ou

$2n = 10$ e $n = 5$ (pentágono)

Consequentemente o outro terá

$n + 1$ ou $5 + 1 = 6$ (hexágono)

12) A soma da soma dos ângulos internos e externos de um polígono é 1440°. Quantas diagonais podemos traçar nesse polígono?

Como queremos saber o número de diagonais, empregaremos a fórmula

$$D = \frac{n\ (n - 3)}{2}$$

Verificamos então precisar conhecer *n*. Vimos também que:

$$S_i + S_e = 180 \times n \quad \text{então}$$

$$1440 = 180 \times n \quad \text{ou}$$

$$n = \frac{1440}{180} = 8$$

Depois disso:

$$D = \frac{8\ (8 - 3)}{2} = 20 \text{ diagonais.}$$

13) Num paralelogramo, um ângulo obtuso é cinco vêzes um agudo. Calcular os ângulos do paralelogramo.

Um paralelogramo tem dois ângulos obtusos e dois agudos, iguais respectivamente. Se chamamos o agudo de x, o obtuso será 5 x e então poderemos escrever:

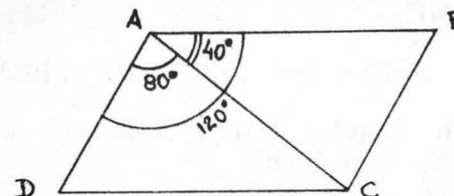
$$x + 5x + x + 5x = 360^\circ \quad \text{ou}$$

$$12\,x = 360^\circ \text{ e } x = 30^\circ$$

Conseqüentemente

$$5\,x = 5 \times 30^\circ = 150^\circ$$

14) Num paralelogramo ABCD, a diagonal AC forma com o lado AD um ângulo de 80° e com o lado AB um ângulo de 40°. Calcular os ângulos do paralelogramo.



Os ângulos A e C são iguais, bem como B e D. (*Teorema 4*)

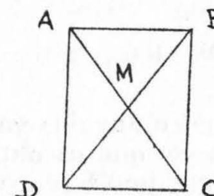
O ângulo A, valendo $80^\circ + 40^\circ = 120^\circ$, o C também valerá

Como os quatro ângulos valem 360° e $A + C = 240^\circ$, segue-se que $B + D = 120^\circ$ e como são iguais, cada um valerá 60°.

Os ângulos do paralelogramo são pois:

60°, 60°, 120° e 120°

15) Uma diagonal de um retângulo forma com um dos lados um ângulo de 36°. Calcular os ângulos que as diagonais formam entre si.



Como os ângulos do retângulo são retos, se o ângulo DAC é 36°, o ângulo CAB será:

$$90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

Por se cortarem ao meio as diagonais e serem iguais, os triângulos AMD e AMB são isósceles. Então os ângulos DAM e MDA são iguais e valem 36° cada um. A lei angular de Thales nos permite calcular o ângulo AMD.

$$AMD = 180° - 36° - 36° = 108°$$

Como os ângulos AMD e AMB são suplementares, segue-se que o ângulo

$$AMB = 180° - 108° = 72°$$

Esse resultado poderia ser obtido através do triângulo isósceles AMB cujos ângulos MAB e MBA são iguais a 54°, ficando para o ângulo

$$AMB = 180° - 54° - 54° = 72°$$

16) A altura de um losango forma com a diagonal menor, um ângulo de 40°; calcular os ângulos do losango.

Na figura 6 do capítulo, o ângulo MOD ou BON é 40°. Como os triângulos OMD e ONB são retângulos os ângulos MDO e NBC valem 50°. Como as diagonais do losango são bissetrizes dos ângulos, segue-se que os ângulos ADC e ABC valem

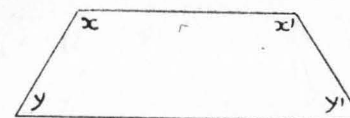
$$2 \times 50° = 100°,$$

cada um. Os quatro ângulos valendo 360° e dois valendo 200° segue-se que os outros dois valerão 160° e como são iguais, por serem opostos, cada um medirá 80°.

Os ângulos do losango são pois:

80°, 80°, 100° e 100°

17) Um dos ângulos internos de um trapézio isósceles é a metade da soma dos outros três. Calcule os ângulos do trapézio.



Vimos que no trapézio isósceles, os ângulos da base são iguais.

O enunciado do problema permite escrever:

$$x = \frac{x + 2y}{2} \quad \text{ou}$$

$$2x = x + 2y \quad \text{ou}$$

$$x = 2y$$

Temos também:

$$x + x + y + y = 360 \quad \text{ou}$$

$$2x + 2y = 360 \quad \text{e} \quad x + y = 180$$

Como $x = 2y$, teremos:

$$2y + y = 180 \quad \text{ou}$$

$$3y = 180 \quad \text{e} \quad y = 60°$$

Sendo

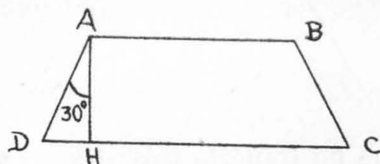
$$x = 2y,$$

$$x = 2 \times 60° = 120°$$

Os ângulos são pois:

60°, 60°, 120° e 120°

18) A altura de um trapézio isósceles forma com um dos lados não paralelos um ângulo de 30°. Calcular os ângulos dêsse trapézio.



O ângulo DAH = 30° e o trapézio é isósceles. O triângulo AHD é retângulo, logo o ângulo ADH vale

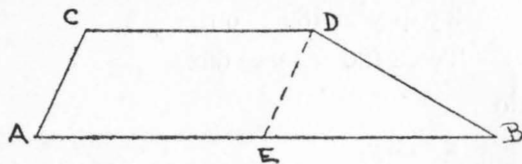
$$90° - 30° = 60°$$

(os ângulos agudos de um triângulo retângulo, são complementares).

Sendo isósceles o trapézio, o ângulo C também vale 60° e os ângulos A e B, que são iguais valerão:

$$A = B = \frac{360° - 60° - 60°}{2} = 120°$$

19) Em um trapézio escaleno ABCD, cuja base maior é AB, o ângulo D é o dôbro do A e o ângulo B é a quinta parte do C. Calcule os ângulos do trapézio.



O problema nos diz que:

$$D = 2A \quad e \quad B = \frac{C}{5} \quad ou \quad C = 5B$$

Sabemos que

$$A + B + C + D = 360° \quad ou$$

$$A + B + 5B + 2A = 360° \quad ou$$

$$3A + 6B = 360°$$

$$A + 2B = 120° \quad (1)$$

A figura CDEA é um paralelogramo e por isso os ângulos C e E são iguais, assim como os ângulos A e CDE.

Como o ângulo CDB é igual a 2A e o ângulo CDE é igual a A, segue-se que o ângulo EDB = A.

Por outro lado o ângulo DEB é igual a 180 — E ou 180 — C (E = C)

No triângulo DEB, sabemos que:

$$D + E + B = 180° \quad \text{(lei angular de Thales)}$$

Teremos então substituindo-se D e E pelos seus valôres:

$$A + 180 - C + B = 180 \quad ou$$

$$A + 180 - 5B + B = 180 \quad ou$$

$$A = 4B$$

Substituindo-se êsse valôr em (1), vem:

$$4B + 2B = 120° \quad e \quad B = 20°$$

Com esse valor teremos:

$$C = 5B = 5 \times 20° = 100°$$

Na equação

$$A + B + C + D = 360° \quad ou$$

$$A + 20 + 100 + D = 360° \quad ou$$

$$A + D = 240°$$

Mas como D = 2 A

$$A + 2\,A = 240^\circ \text{ e } A = 80^\circ \text{ e como}$$

$$D = 2\,A \text{ teremos}$$

$$D = 2 \times 80^\circ = 160^\circ$$

20) A base média de um trapézio tem 20 m e o perímetro 56 m. Calcular os dois lados não paralelos sabendo que a sua diferença é igual a 4 m.

Sabemos que a *base média* é a semi-soma das bases; então:

$$20 = \frac{B + b}{2},$$

chamado B e b as bases do trapézio. Então:

$$B + b = 40\,m$$

e como o perímetro é 56 m, os lados não paralelos medirão:

$$56 - 40 = 16\,m.$$

Se chamarmos um lado de x e outro de y, poderemos escrever:

$$x + y = 16 \quad \text{e}$$
$$x - y = 4$$

Teremos assim um sistema que resolvido dá:

$$x = 10\,m \quad \text{e} \quad y = 6\,m.$$

21) Em um trapézio isósceles ABCD, cujas bases AB e CD medem respectivamente 24 m e 16 m, pede-se calcular a base média e o segmento da base média compreendido entre as diagonais.

A base média é:

$$MN = \frac{AB + CD}{2} \quad \text{ou}$$

$$MN = \frac{24 + 16}{2} = 20\,m$$

O segundo elemento a determinar é:

$$PQ = \frac{AB - CD}{2} \quad \text{ou}$$

$$PQ = \frac{24 - 16}{2} = 4\,m$$

22) Os lados de um quadrilátero medem 48 cm, 40 cm, 30 cm e 14 cm respectivamente; uma diagonal mede 40 cm e o segmento, que une os meios das diagonais 15 cm. Calcular a outra diagonal.

O *teorema 5*, de Eüler (do presente capítulo) nos deu a relação:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 +$$
$$+ BD^2 + 4\,EF^2$$

No caso presente, teremos:

$$48^2 + 40^2 + 30^2 + 14^2 = 40^2 + BD^2 +$$
$$+ 4 \times 15^2 \quad \text{ou}$$
$$2304 + 1600 + 900 + 196 = 1600 +$$
$$+ BD^2 + 900 \quad \text{ou}$$
$$5000 = 2500 + BD^2 \quad \text{ou}$$
$$BD^2 = 2500 \text{ e } BD = 50\,m$$

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) Quanto mede o ângulo interno de um polígono de 14 lados, regular?

RESP.: $154^\circ\ 17'\ 8''\frac{4}{7}$

2) Quanto mede o ângulo externo de um octógono regular?

RESP.: 45°

3) O ângulo externo de um polígono regular é igual ao interno. Qual é o polígono?

RESP.: Quadrado

4) Um polígono regular convexo tem para valor de um ângulo interno 157° 30'; qual é o número de seus lados?

RESP.: 16

5) O ângulo interno de um polígono é igual ao triplo do ângulo externo. Qual é o polígono?

RESP.: Octógono

6) Determinar o valor do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados AB e CD de um octógono.

RESP.: 90°

7) Qual é o polígono convexo em que a soma dos ângulos internos é igual à soma dos ângulos externos?

E.N.C. Dutra — 1952 RESP.: Quadrilátero

8) A soma dos ângulos internos de um polígono regular é igual a 1260°. Determinar o valor do ângulo externo.

C. Naval — 1951 RESP.: 40°

9) Quanto vale o ângulo interno de um polígono regular de nove lados?

C. Naval — 1952 RESP.: 140°

10) Quantos lados tem um polígono regular cujo ângulo exterior mede 15°?

C. Naval — 1952 RESP.: 24 lados

11) Três ângulos internos de um pentágono convexo medem respectivamente, 108°, 100° 20' e 91° 40'. Calcule o maior dos outros dois ângulos sabendo que êle tem 20° mais que o outro.

I. E. — 1951 RESP.: 130°

12) As bissetrizes AM e CM dos ângulos internos de um polígono regular ABCDEF..., encontram-se no ponto M. Calcular o número de lados do polígono, sabendo que o ângulo M é igual a $\frac{2}{3}$ do ângulo interno.

RESP.: 8 lados

13) Prolongando-se os lados AB e CD de um polígono regular convexo ABCD... obtem-se um ângulo de 120°. Quantos lados tem esse polígono?

RESP.: 12 lados

14) Os polígonos P e Q regulares, têm n e n + 1 lados, respectivamente. Dizer quais são os polígonos, sabendo que o ângulo interno do polígono P mais o ângulo externo do polígono Q, valem 168°.

RESP.: pentágono e hexágono

15) Três polígonos têm respectivamente n, n + 1 e n + 2 lados. A soma dos ângulos externos desses polígonos é 222°. Quantos lados têm os polígonos.

RESP.: 4, 5 e 6

2 Polig.

16) Dois polígonos P e Q são tais que o ângulo externo de P é igual a $\frac{1}{12}$ da soma dos internos de Q e o ângulo interno de P é igual ao dôbro do externo de Q. Dizer quais são êsses polígonos.

Resp.: quadrado e octógono

hexág. e hexágono

17) Calcular o número de diagonais do hexágono.

RESP.: 9

18) Quantas diagonais podemos traçar do mesmo vértice de um decágono?

RESP.: 7

19) Qual o polígono no qual se podem traçar 12 diagonais do mesmo vértice?

RESP.: pentadecágono

20) Qual o valor do ângulo externo de um polígono regular que tem 5 diagonais?

C. Naval — 1957 RESP.: 72°

21) A diferença entre o ângulo interno e o externo de um polígono regular é de 60°. Quantos lados tem o polígono?

C. Naval — 1957 RESP.: 6

22) Quantas diagonais tem o polígono regular convexo cuja diferença entre o ângulo interno e o ângulo externo é 36°.

C. Naval — 1958 RESP.: 5

23) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 1080°. Calcule o número de diagonais dêsse polígono.

I.E. — 1951 RESP.: 20

24) Qual é o polígono em que o número de diagonais é o triplo do número de lados?

I.E. — 1952 RESP.: eneágono

25) Qual é o polígono cujo número de lados é igual a $^1/_6$ do número de diagonais.

E.N.C. Dutra — 1948 RESP.: pentadecágono

2 Polig.

26) Os números de lados de dois polígonos são dois números inteiros e consecutivos. A diferença entre os números de diagonais desses polígonos é 10. Quais são esses polígonos?

RESP.: undecágono e dodecágono

2 Polig.

27) Dois polígonos P e Q teem respectivamente n e n + 5 lados. Dizer quais são os polígonos sabendo que os dois têm juntos 40 diagonais.

RESP.: pentágono e decágono.

Polígono

28) A soma da soma dos ângulos internos e externos de um polígono é 3.600°. Quantas diagonais se podem traçar nesse polígono?

RESP.: 170 diagonais

QUADRILATEROS

29) Num paralelogramo o ângulo obtuso é igual à soma dos agudos. Quais sãos os ângulos do paralelogramo.

RESP.: 60°, 60°, 120° e 120°

30) Num paralelogramo ABCD, o diagonal BD forma com o lado BC um ângulo de 40° e com o lado DC um ângulo de 20°. Calcular os ângulos do paralelogramo.

RESP.: 60°, 60°, 120° e 120°

31) Uma diagonal de um retângulo faz com um dos lados um ângulo de 50°. Calcular os ângulos que os diagonais formam entre si.

RESP.: 80° e 100°

32) As diagonais de um retângulo fazem entre si um ângulo de 70°. Determinar o ângulo que as diagonais fazem com os lados.

RESP.: 55° e 35°

33) Num losango uma diagonal forma com um lado um ângulo de 25°. Achar os ângulos do losango.

RESP.: 50°, 50°, 130° e 130°

34) Num paralelogramo ABCD, com 60 cm de perímetro, o ângulo $A = 100°$ e a bissetriz do ângulo D passa pelo ponto médio M do lado AB. Calcular os lados desse paralelogramo e os ângulos do triângulo CMD.

RESP.: 10 cm, 20 cm, 40°, 50°, 90°

35) A altura de um losango forma com a diagonal maior, um ângulo de 60°. Calcular os ângulos do losango.

RESP.: 60°, 60°, 120° e 120°

36) Um dos ângulos internos de um trapézio isósceles é onze vezes menor que a soma dos outros três. Calcule os ângulos do trapézio.

RESP.: 30°, 30°, 150° e 150°

37) A altura de um trapézio isósceles forma com um dos lados não paralelos um ângulo de 40°. Calcular os ângulos do trapézio.

RESP.: 50°, 50°, 130° e 130°

38) Num trapézio ABCD os ângulos da base maior medem 30° e 45°, respectivamente. Calcular os outros dois ângulos do trapézio.

RESP.: 150° e 135°

39) Num trapézio retângulo ABCD, o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos internos A e C medem 20°. Achar os ângulos do trapézio.

RESP.: 50° e 130°

40) A base média de um trapézio tem 10 pés e o perímetro 28 pés. Calcular o maior dos lados não paralelos, sabendo que a sua diferença é igual a dois pés.

C. Naval — 1951 RESP.: 5 pés

41) Em um trapézio escaleno cujas bases AB e CD, medem respectivamente 20 m e 12 m, pede-se o valôr da base média compreendida entre as diagonais.

RESP.: 16 m e 4 m

42) Os lados de um quadrilátero medem 24 m; 20 m; 15 m e 7 m respectivamente. Uma diagonal vale 20 m e a outra 25 m. Calcular o segmento que une os meios das diagonais.

RESP.: 7,5 m

43) Uma diagonal de um quadrilátero divide êsse quadrilátero em um triângulo equilátero e um isósceles, cuja base é essa diagonal. A soma dos dois ângulos do quadrilátero opostos a essa diagonal, é igual a $^7/_8$ da soma dos outros dois ângulos do quadrilátero. Calcule os ângulos do triângulo isósceles.

RESP.: 108°, 36° e 36°

44) Num trapézio isósceles os ângulos agudos C e D são expressos respectivamente por $6x + 4°$ e $8x - 9°$. Calcular os valores dos ângulos A, B, C e D.

E.P.C.Ar. — 1963 RESP.: 43° e 137°

CÍRCULO

Circunferência de círculo ou *circunferência* é o lugar geométrico dos pontos de um plano, equidistantes de um ponto do mesmo plano, chamado *centro*.

A circunferência é uma linha e o *círculo* uma superfície.

Raio é a distância constante de qualquer ponto da circunferência ao centro.

Arco de circunferência é qualquer porção de uma circunferência.

Corda é um segmento de reta que liga as extremidades de um arco.

Diâmetro é a maior corda que se pode traçar numa circunferência; é representado por D ou 2R.

Flexa é o segmento do diâmetro compreendido entre os pontos médios da corda e do arco *subtendido* pela corda.

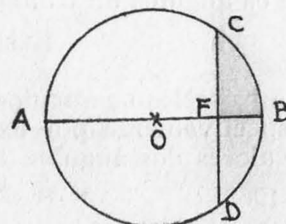


FIG. 1

Na figura 1, temos:

Circunferência de centro *o*

AB — diâmetro (D ou 2R)
OA — raio (R)
CD — corda
CBD e CAD — arcos
FB — flexa

***Tangente* — é a reta perpendicular à extremidade de um diâmetro.**

***Secante* — é a reta que intercepta a circunferência em dois pontos.**

***Normal* — é a perpendicular à tangente no ponto de tangência.**

No caso em questão a normal à circunferência em um ponto é a reta que contém o raio que passa por êsse ponto.

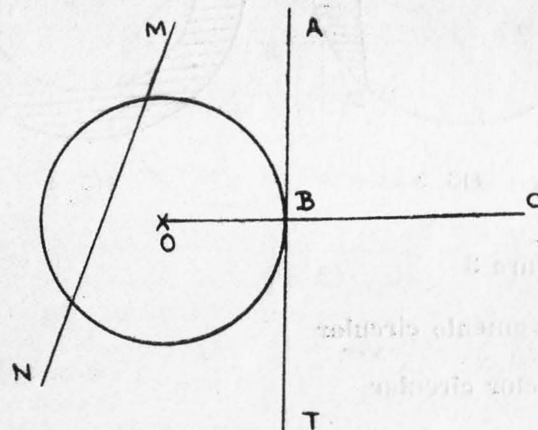


FIG. 2

Na figura 2

AT — tangente (perpendicular ao raio)
MN — secante
CB — normal à circunferência no ponto B.

Segmento circular — é a parte da superfície do círculo compreendida entre um arco e a respectiva corda.

Setor circular — é a porção da superfície do círculo compreendida entre dois raios e o arco por êles interceptado.

Coroa Circular — é a parte da superfície compreendida entre dois círculos de raios diferentes e mesmo centro.

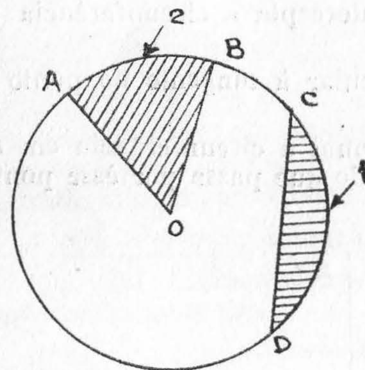


FIG. 3

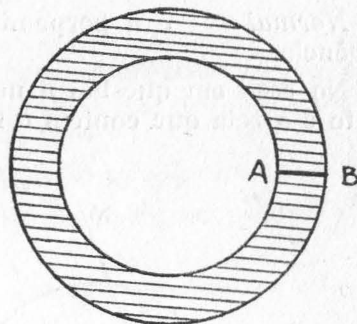


FIG. 4

Na figura 3

1 — segmento circular

2 — setor circular

Na figura 4

Parte tracejada — coroa circular.

AB — largura da coroa.

Propriedade 1

O diâmetro perpendicular a uma corda divide esta corda e os dois arcos por ela subtendidos em duas partes iguais.

Propriedade 2

Por três pontos não em linha reta pode-se sempre fazer passar uma circunferência.

POSIÇÕES RELATIVAS DE DOIS CÍRCULOS

1.ª posição: secantes

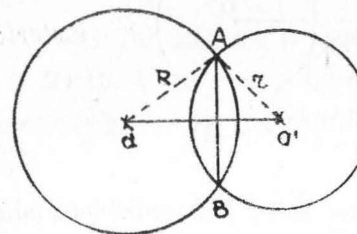


FIG. 5

Na figura 5

OO' — linha dos centros (d)

AB — corda comum (perpendicular a OO').

$$r - r' < d < r + r'$$

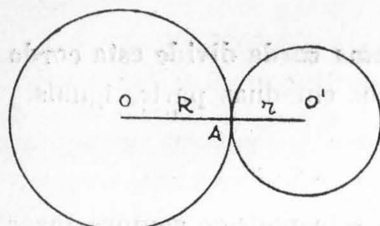


FIG. 6

2.ª posição:

tangentes exteriores

OO' = d = R + r

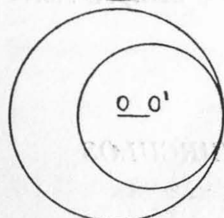


FIG. 7

3.ª posição:

tangentes interiores

OO' = d = R — r

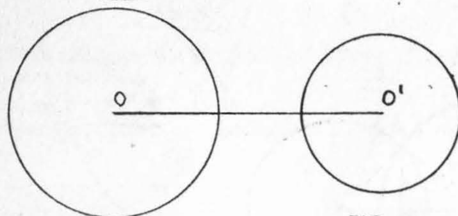


FIG. 8

4.ª posição:

Exteriores

OO' = d>R + r

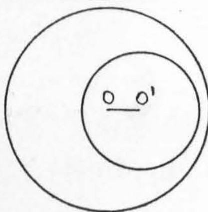


FIG. 9

5.ª posição:

Interiores

OO' = d<R — r

Quando os centros coincidem as circunferências são concêntricas e

d = OO' = zero.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Qual a posição relativa de duas circunferências de raios respectivamente iguais a 4 cm e 6 cm, sendo a distância dos centros igual a 8 cm.

Pelo que foi mostrado no início do capítulo as relações entre a distância dos centros *d* e os raios R e r, caracterizam as posições de duas circunferências. No problema, aquela distância é 8; menor que a soma dos raios e maior do que a sua diferença.

$$6 - 4 < 8 < 6 + 4$$

Conclue-se então que as circunferências são secantes.

2) No mesmo problema 1, sendo 10 cm a distância dos centros.

Depois do que foi dito no problema 1, vemos que

$$d = R + r, \quad \text{ou} \quad 10 = 6 + 4$$

que caracteriza duas circunferências tangentes exteriores.

3) Qual a posição relativa de duas circunferências de raios 7 cm e 13 cm, sendo a distância dos centros 6 cm.

É fácil verificar que

$$d = R - r \quad \text{ou} \quad 6 = 13 - 7$$

e que as circunferências são tangentes interiores.

4) No problema anterior, se a distância entre os centros fôr 23 cm, como serão as circunferências?

É fácil verificar que

$$d > R + r, \quad \text{isto é} \quad 23 > 13 + 7$$

indicando assim serem exteriores as circunferências.

5) **Qual a posição relativa de duas circunferências de raios 7 cm e 13 cm sendo a distância dos centros 4 cm.**

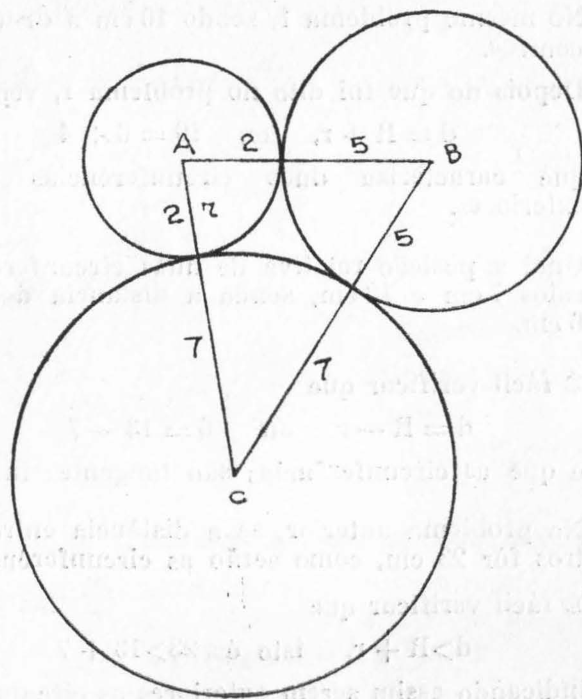
Verifica-se que

$$d < R - r, \quad \text{isto é} \quad 4 < 13 - 7$$

e que, portanto, as circunferências são interiores.

6) **Três círculos tangentes entre si, dois a dois, exteriormente, têm para raios 2 cm, 5 cm e 7 cm.**

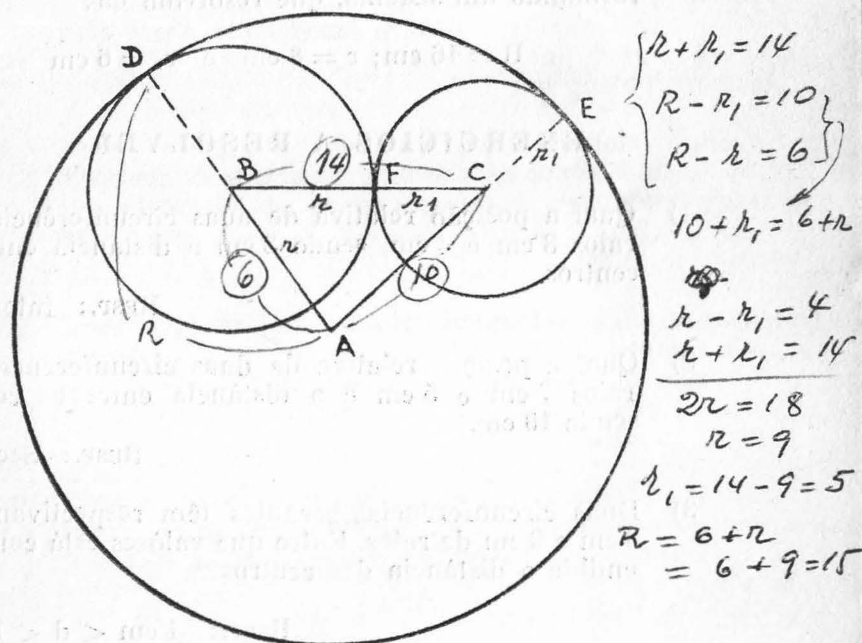
Determinar os lados do triângulo obtido ligando-se dois a dois os centros dos círculos.



Os círculos de centro A e B, cujos raios são 2 e 5 têm para distância dos centros $2 + 5 = 7$, por serem tangentes exteriores. Raciocinando-se da mesma maneira vê-se que os lados do triângulo são:

7 cm; 9 cm e 12 cm

7) **Dois círculos de centro B e C são tangentes exteriores. Ambos são tangentes interiormente de um círculo de centro A. Sabendo-se que AB = 6 cm; BC = 14 cm e AC = 10 cm, achar os raios dos três círculos A, B e C.**



Façamos AD = R; BF = r; FC = r_1

Os círculos B e C por serem tangentes exteriores a distância entre seus centros é

$$d = BC = r + r_1 = 14$$

Os círculos A e B sendo tangentes interiores, a distância entre seus centros $AB = R - r = 8$ cm. O mesmo ocorre com os círculos A e C, cuja distância entre centros $AC = R - r_1 = 10$.

Temos as equações

$$\begin{cases} r + r_1 = 14 \\ R - r = 8 \\ R - r_1 = 10 \end{cases}$$

formando um sistema, que resolvido dá:

$$R = 16 \text{ cm};\ r = 8 \text{ cm} \quad \text{e} \quad r_1 = 6 \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) Qual a posição relativa de duas circunferências de raios 8 cm e 4 cm, sendo 3 cm a distância entre os centros.

RESP.: Interiores

2) Qual a posição relativa de duas circunferências de raios 7 cm e 5 cm e a distância entre os centros sendo 10 cm.

RESP.: Secantes

3) Duas circunferências secantes têm respectivamente 8 cm e 9 cm de raios. Entre que valôres está compreendida a distância dos centros?

RESP.: $1 \text{ cm} < d < 17 \text{ cm}$

4) Duas circunferências de raios *r* e *r'* ($r > r'$) e centros *o* e *o'* para serem secantes, que relação deve existir?

C. Naval — 1960 — RESP.: $r - r' < d < r + r'$

5) Duas circunferências têm para raios 3 cm e 5 cm, mas a distância entre os centros é nula. Como são as circunferências?

RESP.: concêntricas

6) A distância de um ponto exterior ao ponto que lhe é mais afastado da circunferência mede 18 cm. Se o raio tiver 5 cm, qual será a distância do ponto à circunferência?

RESP.: 8 cm

7) Numa circunferência de raio 20 cm, pode existir uma corda de 3,08 cm?

RESP.: Sim, porque é menor que o diâmetro

8) Achar o diâmetro de uma circunferência, onde a distância de um ponto exterior ao centro é de 15 cm e a distância do mesmo ponto à circunferência é de 1,2 cm.

RESP.: 6 cm

9) Duas circunferências são tangentes exteriores. O diâmetro da primeira mede 12 cm e a distância dos centros é de 11 cm. Calcular o diâmetro da segunda.

RESP.: 10 cm

10) Duas circunferências são tangentes interiores. O diâmetro da menor mede 12 dm e a distância dos centros é de 2 dm. Calcular o diâmetro da maior.

RESP.: 8 dm

11) Os lados de um triângulo são 4 cm; 6 cm e 8 cm. Achar os raios das três circunferências que têm para centro os vértices desse triângulo e são tangentes entre si, exteriormente, dois a dois.

RESP.: 1 cm; 3 cm e 5 cm

12) Dado o triângulo de lados AB = 13 cm; AC = 9 cm e BC = 8 cm, traçam-se circunferências de centros A, B e C tangentes duas a duas exteriormente. Calcule o menor dos raios das circunferências.

C. Naval — 1960 RESP.: 2 cm

13) Duas circunferências concêntricas têm para raios 8 dm e 12 dm respectivamente. Determinar os raios dos círculos tangentes às duas circunferências concêntricas.

RESP.: 2 dm e 10 dm

14) Dois círculos do mesmo raio 5 cm são tais que, cada um deles passa, pelo centro do outro. Esses círculos cortam-se em M e N e interceptam a linha dos centros em P e Q. Calcular o perímetro do quadrilátero MPNQ.

C. Naval. — 1961 RESP.: 20 cm

MEDIDAS DOS ÂNGULOS

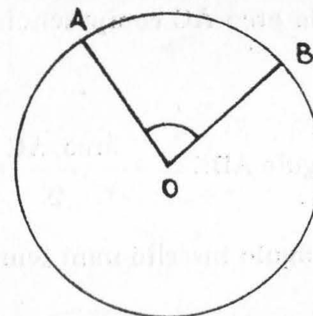


FIG. 1

Ângulo central AOB é o que tem o vértice no centro da circunferência e cujos lados são raios. Tem por medida a mesma medida do arco AB compreendido entre seus lados (raios da circunferência) (fig. 1).

Relação:

ângulo AOB = arco AB

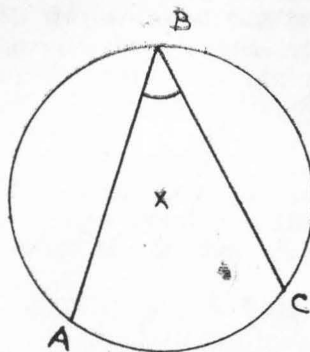


FIG. 2

Ângulo inscrito ABC é o que tem para lados duas cordas que partem de um ponto qualquer da circunferência, ficando seu vértice, portanto, sôbre a circunferência. Tem para medida a metade do arco AC compreendido entre seus lados (fig. 2).

Relação:

$$\text{ângulo ABC} = \frac{\text{arco AC}}{2}$$

Por isso, todo ângulo inscrito num semi círculo é reto.

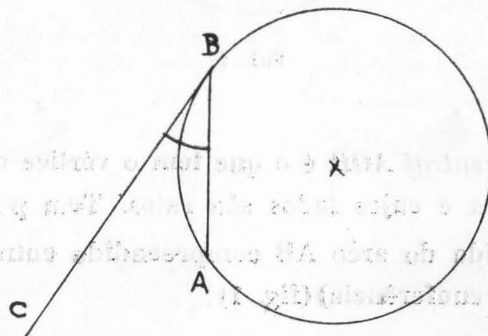


FIG. 3

Ângulo de segmento ABC é o formado por uma corda e a tangente à circunferência traçada por uma de suas extremidades (fig. 3).

Tem para medida a metade do arco AB subtendido pela corda AB.

Relação:

$$\text{ângulo ABC} = \frac{\text{arco AB}}{2}$$

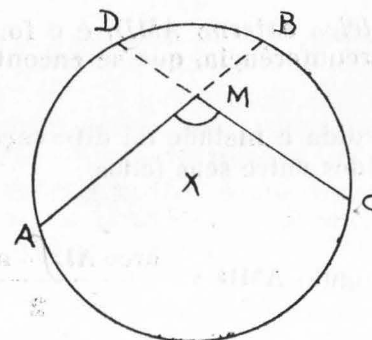


FIG. 4

Ângulo excêntrico interno AMC, é o formado por duas cordas que se cortam no interior da circunferência em um ponto que não seja o centro da mesma. (fig. 4) Tem para medida a semi-soma dos arcos BD e AC compreendidos entre seus lados (AM e MC) e seus prolongamentos (DM e BM).

Relação:

$$\text{ângulo AMC} = \frac{\text{arco AC} + \text{arco BD}}{2}$$

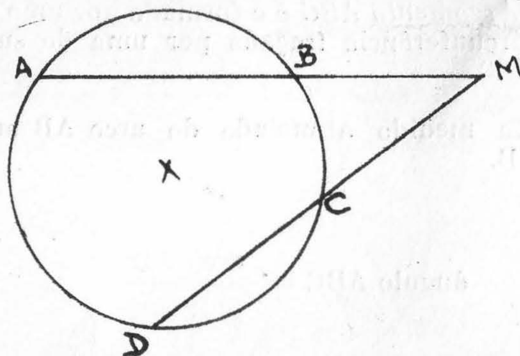


FIG. 5

Ângulo excêntrico externo AMD, é o formado por duas secantes à uma circunferência, que se encontram fora dela. (fig. 5)

Tem para medida a metade da diferença dos arcos AD e BC, compreendidos entre seus lados.

Relação:

$$\text{ângulo AMD} = \frac{\text{arco AD} - \text{arco BC}}{2}$$

Pode também ser formado por uma secante e uma tangente (à um circunferência), que se encontram (fig. 6), ângulo AMC.

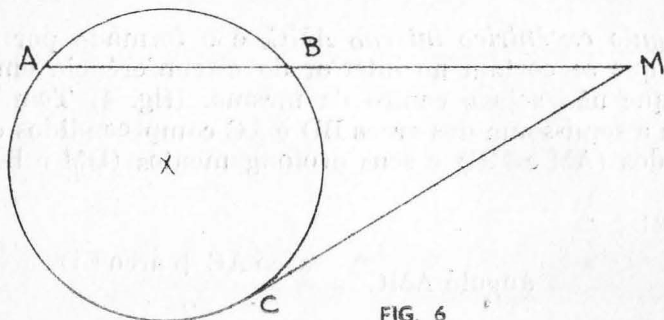


FIG. 6

Sua medida será também:

$$\text{ângulo AMC} = \frac{\text{arco AC} - \text{arco BC}}{2}$$

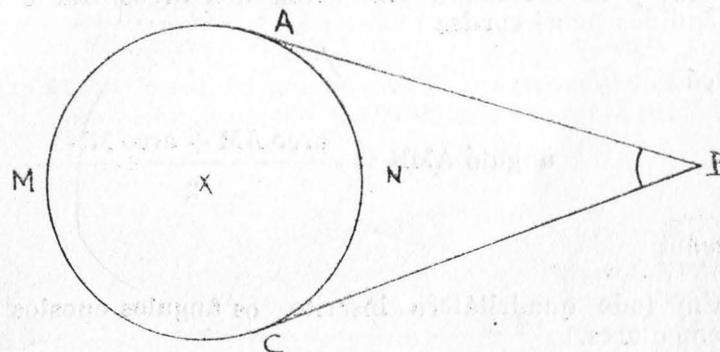


FIG. 7

Ângulo circunscrito ABC é um ângulo excêntrico exterior; seus lados, são tangentes ao círculo, que se encontram em um ponto exterior ao círculo (fig. 7)

Tem para medida, portanto

$$\text{ângulo ABC} = \frac{\text{arco AMC} - \text{arco ANC}}{2}$$

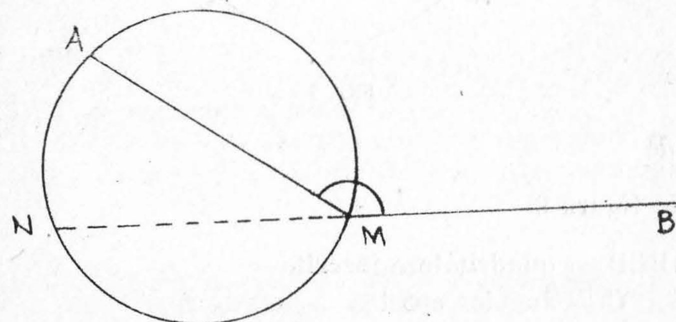


FIG. 8

Ângulo ex-inscrito AMB é formado por uma corda e o prolongamento de outra corda que faz com a primeira um ângulo inscrito. (fig. 8)

Tem para medida a semi-soma dos arcos AM e MN subtendidos pelas cordas

Relação

$$\text{ângulo AMB} = \frac{\text{arco AM} + \text{arco MN}}{2}$$

Teorema

Em todo quadrilátero inscrito, os ângulos opostos são suplementares.

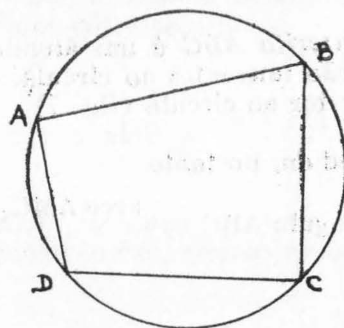


FIG. 9

Relação

Na figura 9

ABCD — quadrilátero inscrito
A e C — ângulos opostos
B e D — ângulos opostos

Relação

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \text{ e } \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

SEGMENTO CAPAZ DE UM ÂNGULO

Segmento capaz de um ângulo é um segmento circular no qual todos os ângulos nêle inscritos têm a mesma medida.

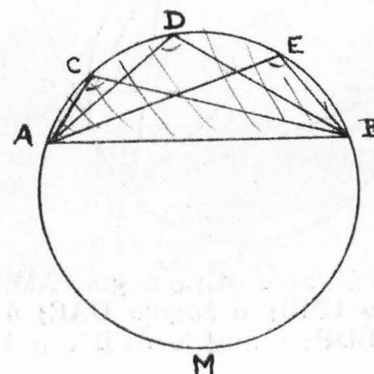


FIG. 10

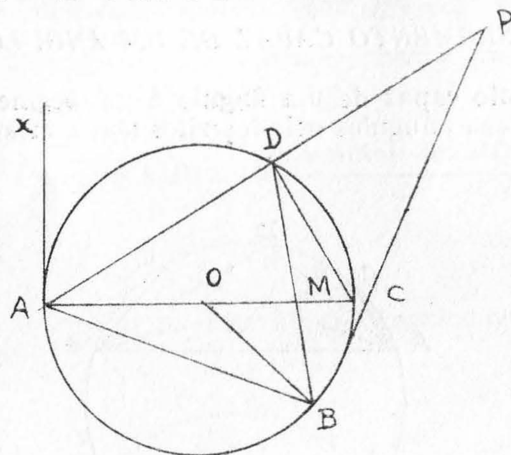
Na figura 10

ACDEB — segmento circular
ACB, ADB e AEB — ângulos inscritos no segmento

Relação

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = \frac{\text{arco AMB}}{2}$$

1) Na figura abaixo o ângulo BDC = 25°; o arco DC = 60° e AC é um diâmetro.



Calcular: o arco BC; o ângulo AMB; o ângulo BAC; o ângulo CMB: o ângulo DAC; o ângulo XAP: o ângulo BDP: o ângulo APB e o ângulo AOB.

O ângulo BDC é um ângulo inscrito; sua medida, como vimos é a metade do arco BC.
Então:

$$\widehat{BDC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \quad \text{ou}$$

$$25^\circ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \quad \text{e} \quad \overset{\frown}{BC} = 50^\circ$$

AC sendo um diâmetro, o arco AB valerá $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ e como o arco DC = 60°, o ângulo AMB, excêntrico interno é medido por:

$$\widehat{AMB} = \widehat{DMC} \quad \text{(opostos pelo vértice)} =$$

$$= \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC}}{2} \quad \text{ou}$$

$$\widehat{AMB} = \frac{130^\circ + 60^\circ}{2} = \frac{190^\circ}{2} = 95^\circ$$

O ângulo BAC é inscrito e seu valôr será dado por:

$$\text{ângulo BAC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

O arco DC sendo igual a 60° o arco DA será de 120° e o ângulo CMB = AMD, excêntrico interno será dado por:

$$\widehat{CMB} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CB}}{2} =$$

$$= \frac{120^\circ + 50^\circ}{2} = \frac{170^\circ}{2} = 85^\circ$$

O ângulo DAC é inscrito e seu valor será dado por:

$$\widehat{DAC} = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

O ângulo xAP é um ângulo de segmento e tem para medida:

$$\widehat{xAP} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

O ângulo BDP é um ângulo ex-inscrito e tem para valor:

$$\widehat{BDP} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BD}}{2}$$

o arco BD é a soma dos arcos BC e CD iguais respectivamente a 50° e 60°. Portanto o arco BD = 110° e então:

$$\widehat{BDP} = \frac{120^\circ + 110^\circ}{2} = \frac{230^\circ}{2} = 115^\circ$$

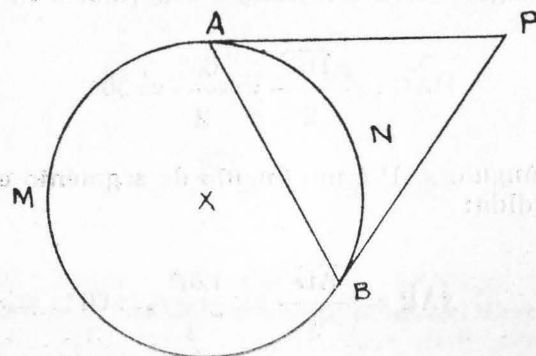
O ângulo APB é excêntrico externo e tem para medida

$$\widehat{APB} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{DC}}{2}$$

$$\widehat{APB} = \frac{130^\circ - 60^\circ}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

Finalmente o ângulo AOB é um ângulo central e tem para medida o número de graus do arco compreendido entre seus lados, isto é, 130°.

2) Na figura abaixo AB é o lado do triângulo equilátero inscrito no círculo; calcular o ângulo APB.



O ângulo APB é circunscrito e sua medida, como vimos é dada por

$$\widehat{APB} = \frac{\overset{\frown}{AMB} - \overset{\frown}{ANB}}{2}$$

Sendo a corda AB o lado do triângulo equilátero, o arco por ela subtendido, isto é, ANB, valerá:

$$\overset{\frown}{ANB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

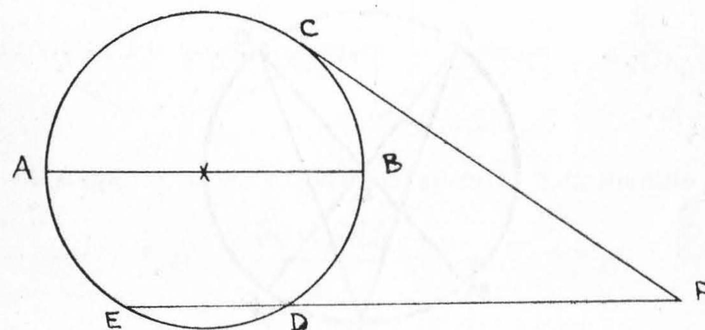
Consequentemente o arco $\overset{\frown}{AMB}$ valerá:

$$360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

Então o ângulo

$$\widehat{APB} = \frac{240^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

3) Na figura abaixo os arcos $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{BD}$ subtendem lados de hexagonos regulares.



EP é paralela ao diâmetro AB. Calcular o ângulo CPE.

Como os arcos CB e BD subtendem lados do hexágono regular inscrito, cada um deles vale 60° e os dois, isto é, CB + BD, valerão 120°. A secante EP sendo paralela ao diâmetro AB, os arcos AE e BD são iguais, pois são arcos do mesmo círculo compreendidos entre cordas paralelas e como tal valerão 60°. AB sendo um diâmetro, o arco AC valerá 180° — 60° = 120°.

Consequentemente o arco CAE valerá 120° + 60°, isto é, 180°.

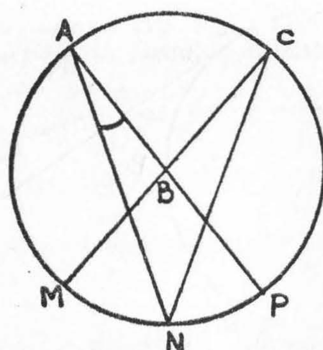
O ângulo CPE sendo excêntrico exterior, tem para medida

$$\widehat{CPE} = \frac{\overset{\frown}{CAE} - \overset{\frown}{CBD}}{2} \quad \text{ou}$$

$$\widehat{CPE} = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

4) Qual o valor do ângulo A, assinalado na figura abaixo, sabendo-se que o ângulo central B = 56° e C = 18°.

E.N.C. Dutra — 1951



O ângulo MBP é igual ao ângulo ABC, como apostos pelo vértice. Consequentemente o arco $\overset{\frown}{MP}$ vale 56°.

O ângulo MCN, inscrito, vale 18°, então o arco $\overset{\frown}{MN}$ vale 36° e consequentemente o arco $\overset{\frown}{NP}$ valerá:

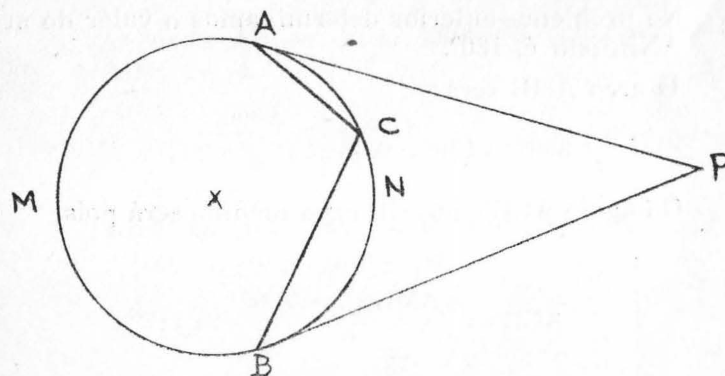
$$56° - 36° = 20°$$

Nessas condições o ângulo NAP, que é inscrito, valerá:

$$\widehat{NAP} = \frac{\overset{\frown}{NP}}{2}$$

$$\widehat{NAP} = \frac{20°}{2} = 10°$$

5) Na figura que se segue o ângulo P é igual a 50°. Calcular o número de graus do arco menor.



O ângulo P é um ângulo circunscrito. Sua medida é:

$$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{AMB} - \overset{\frown}{ANB}}{2} \quad \text{ou}$$

$$50 = \frac{\overset{\frown}{AMB} - \overset{\frown}{ANB}}{2} \quad \text{ou}$$

$\overparen{AMB} - \overparen{ANB} = 100^\circ$ (1)

Como

$\overparen{AMB} + \overparen{ANB} = 360^\circ$ (2)

Vemos que as equações (1) e (2) formam um sistema, e:

$$\overparen{ANB} = \frac{360^\circ - 100^\circ}{2} = \frac{260^\circ}{2} = 130^\circ$$

6) **Na figura do exemplo anterior, calcular o ângulo ACB.**

No problema anterior determinamos o valôr do arco ANB; isto é, 130°.

O arco AMB será:

$360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$

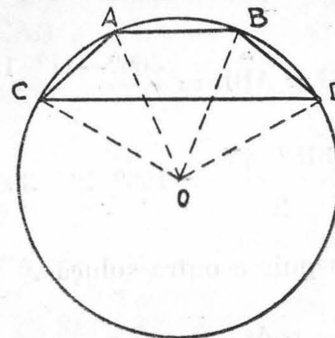
O ângulo ACB é inscrito; sua medida será pois:

$$\widehat{ACB} = \frac{\overparen{AMB}}{2} = \frac{230^\circ}{2} = 115^\circ$$

7) As bases de um trapézio inscrito são AB e CD. Calcular os ângulos internos desse trapézio, sabendo-se que AB é o lado do octógono regular inscrito e CD o lado do triângulo equilátero inscrito no mesmo circulo.

O problema tem duas soluções, dependendo do modo de considerar os lados do quadrado e do octógono, em relação ao centro do círculo.

Vejamos uma solução:



A corda CD sendo o lado do triângulo quilátero, o arco $\overparen{CABD}$ vale $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

A corda AB sendo o lado do octógono, o ângulo AOB vale:

$$\frac{360}{8} = 45^\circ$$

Para os aros $\overparen{AC}$ e $\overparen{BD}$, que são iguais sobram

$120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$

Cada um deles valerá pois:

$$\frac{75^\circ}{2} = 37^\circ\ 30'$$

O trapézio ABCD é isósceles, e como tal, tem os ângulos da base iguais, isto é: $A\hat{C}D = B\hat{D}C$ e $C\hat{A}B = A\hat{B}D$, todos inscritos. Temos, então:

$$A\hat{C}D = BDC = \frac{\overparen{ABD}}{2} = \frac{45^\circ + 37^\circ\ 30'}{2} =$$

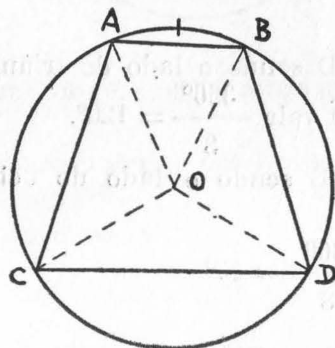
$$= \frac{82^\circ\ 30'}{2} = 41^\circ\ 15'$$

e

$$\hat{CAB} = \hat{ABD} = \frac{360^\circ - 41^\circ\ 15'}{2} =$$

$$= \frac{318^\circ\ 45'}{2} = 159^\circ\ 22'\ 30''$$

Daremos a seguir a outra solução.



Como vimos na solução anterior, o arco CD = 120°, e o arco AB = 45°

O trapézio ABCD sendo isósceles, para os arcos AC + BD, que são iguais sobram:

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = \frac{360^\circ - (120^\circ + 45^\circ)}{2}$$

$$= \frac{360^\circ - 165^\circ}{2} = \frac{195^\circ}{2} = 97^\circ\ 30'$$

Os ângulos ACD e BDC são iguais, assim como os ângulos CAB e ABD, todos inscritos.

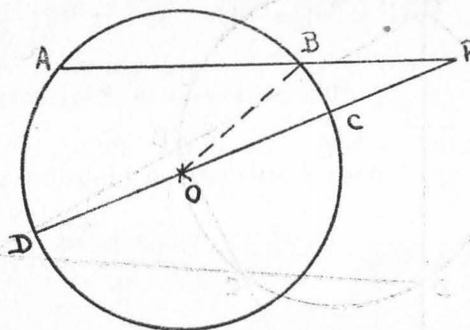
$$\hat{ACD} = \hat{BDC} = \frac{45^\circ + 97^\circ\ 30'}{2} =$$

$$= \frac{142^\circ\ 30'}{2} = 71^\circ\ 15' \quad \text{e}$$

$$\hat{CAB} = \hat{ABD} = \frac{120^\circ + 97^\circ\ 30'}{2} =$$

$$= \frac{217^\circ\ 30'}{2} = 108^\circ\ 45'$$

8) Na figura abaixo PB = R, o ângulo APD = 50° Calcular os arcos $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{AD}$.



A linha tracejada OB é o primeiro passo a ser dado para a resolução do problema e com ela obtemos o triângulo OBP, isósceles, isto é, com os lados OB e BP iguais. Assim sendo, os ângulos *P* e *O* são iguais a 50°. Como o ângulo *O* é central, o arco BC tem também 50°. Como o ângulo APD é excêntrico externo, sua medida é:

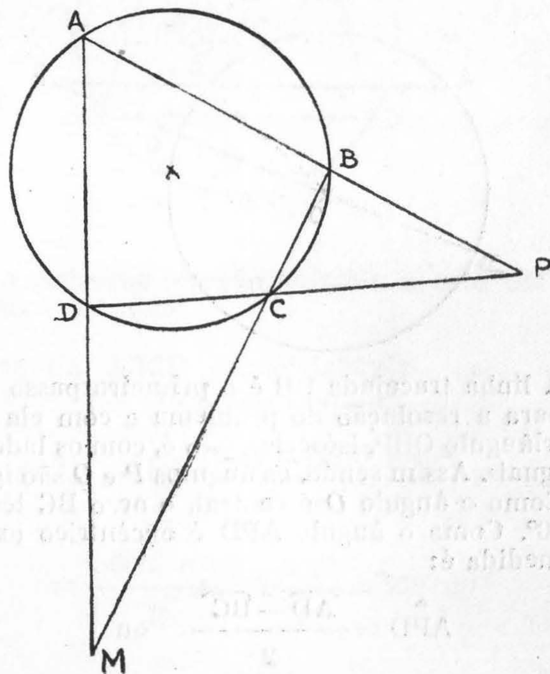
$$\hat{APD} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{2} \quad \text{ou}$$

$$50^\circ = \frac{\overset{\frown}{AD} - 50^\circ}{2} \quad \text{ou}$$

$$100^\circ = \overset{\frown}{AD} - 50^\circ \quad \text{e}$$

$$\overset{\frown}{AD} = 150^\circ$$

9) Calcular os ângulos internos de um quadrilátero convexo inscrito num circulo, sabendo que os lados opostos prolongados cortam-se formando ângulos de 35° e 12°. (Ex. de Geometria - Ten.-Coronel Edgar Filho).



Os ângulos P e M sendo excêntricos exteriores têm para medida, respectivamente.

$$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{2} \quad \text{e}$$

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{DC}}{2}$$

Substituindo-se P e M, por seus valôres, vem:

$$24^\circ = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC} \quad (1)$$

$$70^\circ = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{DC} \quad (2)$$

Somando-se membro a membro as igualdades 1 e 2, vemos:

$$94^\circ = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AB} - (\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DC}) \quad (3)$$

Como o quadrilátero ABCD é inscrito, os ângulos $D + B = 180^\circ$ e $A + C = 180^\circ$.

Ora, os arcos $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AB} = 360^\circ - (\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD})$. Mas como o ângulo A, inscrito, é medido por

$$\frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{2},$$

Segue-se que $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = 2\hat{A}$. Então, a igualdade (3) pode ser escrita:

$$94^\circ = 360^\circ - 2A - 2A$$

$$94^\circ = 360^\circ - 4A \quad \text{e}$$

$$4A = 360^\circ - 94^\circ = 266^\circ \quad \text{e}$$

$$A = \frac{266^\circ}{4} = 66^\circ\ 30'$$

O ângulo C, por sua vez será:

$$\hat{C} = 180 - A \quad \text{ou}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 66^\circ\ 30' = 113^\circ\ 30'$$

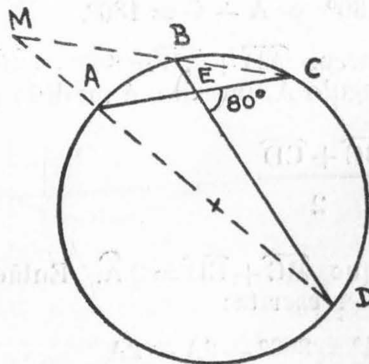
No triângulo MAB o ângulo $M = 35^\circ$ e o ângulo $A = 66^\circ\ 30'$, então o ângulo B valerá:

$$B = 180^\circ - (M + A) = 180^\circ - (35^\circ + 66^\circ\ 30')$$

$$B = 78^\circ\ 30' \quad \text{e}$$

$$D = 180^\circ - B = 180^\circ - 78^\circ\ 30' = 101^\circ\ 30'$$

10) Sôbre uma circunferência marcam-se os pontos A, B, C e D, nesta ordem, de modo que o arco DC seja o triplo do arco AB. Traçam-se as cordas AC e BD que se cortam num ponto E formando um ângulo CED igual a 80°. Calcular o ângulo formado pelas cordas AD e BC que se obtém ligando os pontos A a D e B a C, e os arcos AB e DC.



O ângulo E, excêntrico interno tem para valor:

$$E = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

Como $\overset{\frown}{CD} = 3\overset{\frown}{AB}$, teremos:

$$E = 80^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB} + 3\overset{\frown}{AB}}{2} = 2\overset{\frown}{AB}$$

Então

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

Como conseqüência

$$\overset{\frown}{DC} = 3\overset{\frown}{AB} = 3 \times 40^\circ = 120^\circ$$

O ângulo de AD com BC, que chamaremos M, é um ângulo excêntrico externo e tem para medida:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{AB}}{2} \quad \text{ou}$$

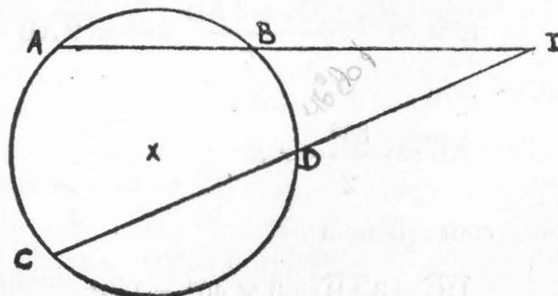
$$\hat{M} = \frac{120^\circ - 40^\circ}{2} = 40^\circ$$

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) Num círculo marcam-se, sucessivamente e no mesmo sentido, os pontos A, B, C e D, tais que os arcos AB, BC e CD medem, respectivamente 60°, 90° e 40°. Calcular as medidas: a) do ângulo ACB; b) do ângulo ABD; c) dos ângulos formados pelas cordas AC e BD; d) do ângulo agudo formado pelas secantes AD e BC; e) dos ângulos formados pela corda AC com a tangente no ponto C.

RESP.:
- a) 30°
- b) 85°
- c) 50° e 130°
- d) 10°
- e) 75° e 105°

2) Se o arco AC tem 126° e o arco BD tem 46° 10', qual será o valor do ângulo AIC da figura.

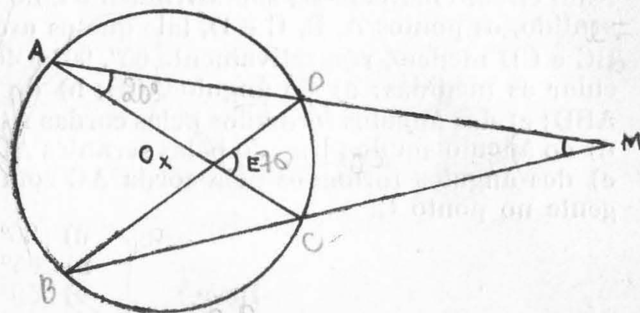


E.P.C.Ar — 1951 RESP.: 39° 55'

3) Calcular o ângulo de duas cordas que se encontram sôbre uma circunferência, sabendo-se que o ângulo das tangentes traçadas pelas extremidades das cordas é de 54°.

RESP.: 63°

4) Na figura abaixo, calcular o ângulo M sabendo-se que o ângulo A é igual a 20° e o ângulo E é igual a 70°.



E.N.C. Dutra — 1951 RESP.: 30°

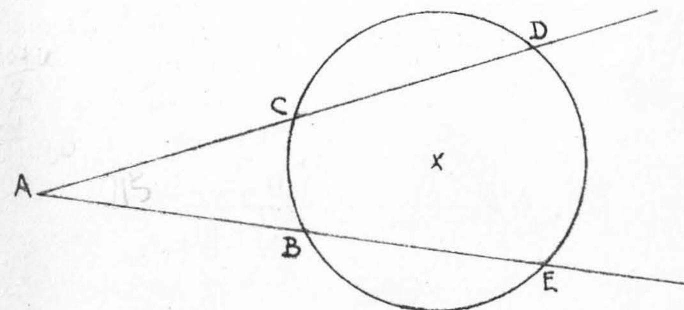
5) O ângulo A de um triângulo ABC inscrito num círculo mede 40°. Calcule o ângulo formado pelas tangentes ao círculo, traçadas por B e C.

I.E. — 1952 RESP.: 100°

6) Duas secantes a um círculo formam um ângulo de 25° e os arcos por elas compreendidos dão por soma 152°. Calcule o número de graus do arco menor.

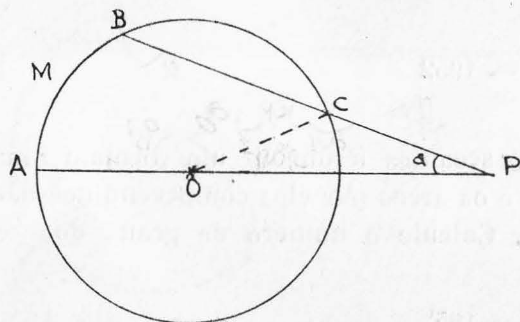
I.E. — 1952 RESP.: 51°

7) Na figura abaixo, o ângulo A tem 15° mais do que o arco BC. Calcular o ângulo A sabendo que a razão dos arcos BC e DE é de 1 para 4.



C. Naval — 1952 RESP.: 45°

8) Na figura, PC = OC = R e a = 20; OPC = a
O arco AMB vale...

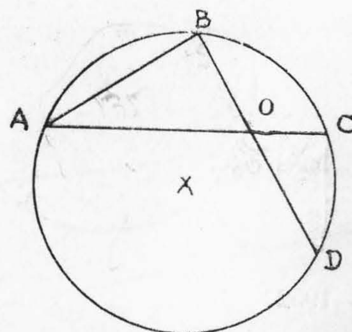


C. Naval — 1960 Resp.: 60°

9) Na figura abaixo sabe-se que:

$\widehat{ACD} = 85°$; $\widehat{AOD} = 120°$

Calcular o ângulo BAO

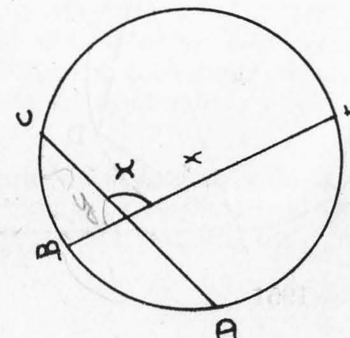


C. Naval — 1953 Resp.: 35°

10) Na figura

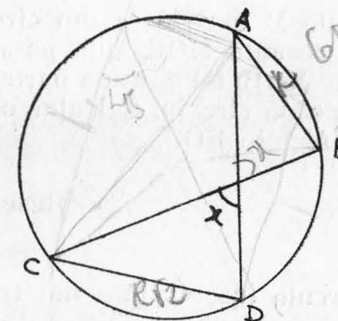
$\overline{BC} = 35° \ 51' \ 47''$; $\overline{DE} = 60° \ 20' \ 15''$

Calcule o ângulo x



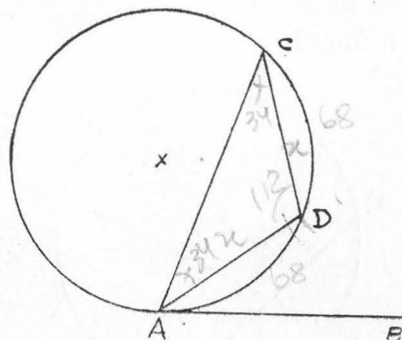
C. Naval — 1961 Resp.: 131° 53' 59"

11) Na figura abaixo, AB é igual ao lado do hexágono inscrito e CD é igual ao lado do quadrado inscrito. Calcule o valor do ângulo x.



E.P.C.Ar. — 1951 Resp.: x = 75°

12) Na figura abaixo BA é uma tangente e as cordas AD e CD são iguais entre si. O ângulo CDA tem 112°. Qual é o valor do ângulo DAB.



E.P.C.Ar. — 1951 Resp.: 34°

13) Em um círculo a corda AB é o lado do quadrado inscrito e BC é o lado do triângulo equilátero inscrito. Calcule os ângulos internos do triângulo ABC, sabendo-se que o centro do círculo é interior a êste triângulo.

C. Naval — 1958 Resp.: 45°; 60° e 75°

14) De um ponto M exterior a um círculo de centro *o* tiram-se a secante MOC, que passa pelo centro, e uma secante MAB, tal que sua parte externa MA seja igual ao raio do círculo. Calcular o ângulo BMC em função do ângulo BOC.

Resp.: $\widehat{BMC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{3}$

15) Em um círculo inscrevemos um trapézio. Uma das bases subtende um arco que vale $\dfrac{1}{6}$ da circunferência e a outra $\dfrac{1}{9}$ da circunferência. Calcular os ângulos internos do trapézio de maior altura.

C. Naval — 1959 Resp.: 85° e 95°

16) Um ângulo ex-inscrito vale 150°. Um dos seus lados subtende um arco de 130°. Quanto mede o arco subtendido pela corda que se obtem prolongando o outro lado desse ângulo?

Resp.: 170°

17) Um ângulo de segmento vale 20°. A que fração da circunferência corresponde o arco subtendido pela corda que forma êsse ângulo?

Resp.: $\dfrac{1}{9}$

18) As cordas AB e CD são perpendiculares; o arco AC vale 42° e o arco AD, 108°. Calcular os ângulos do triângulo BCD.

Resp.: 36°; 69° e 75°

19) Por um ponto M exterior a um círculo traçam-se as secantes MAB e MDC que formam um ângulo AMC = 62°. Outras duas secantes NDA e NBC formam o ângulo ANC de 26°. Calcular os valôres dos arcos AC e BD.

Resp.: AC = 88° e BD = 36°

20) Os arcos compreendidos entre 2 secantes a uma circunferência de raio R, são representados em graus, pelos números $\dfrac{\pi R}{2}$ e $\dfrac{\pi R}{3}$. Calcule o ângulo dessas secantes.

I.E. — 1951 Resp.: 15°

21) Os arcos compreendidos entre os lados de um ângulo excêntrico exterior medem 150° e 10°. Calcular, a

menos de um centésimo por falta, a medida do ângulo em radianos.

C. Naval — 1951 Resp.: 1,22 radianos

22) Os arcos AB, BC, CD descritos no mesmo sentido medem, respectivamente, 90°, 38° e 108°. Calcular os ângulos internos do quadrilátero inscrito.

Resp.: 73°, 116°, 107° e 64°



23) Demonstrar o seguinte teorema: O ângulo inscrito num círculo tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados.

E.N.C. Dutra — 1953

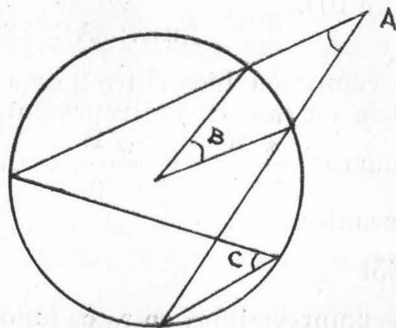
OBSERVAÇÃO: Os exercícios 20 e 21 só devem ser resolvidos depois de estudado o capítulo: medida da circunferência.



24) Calcular o ângulo formado pelo lado do triângulo equilátero inscrito em um círculo e a semi reta exterior, normal à circunferência num dos vértices do mesmo triângulo.

Resp.: 150°

25) Na figura calcular o ângulo B em função de A e C.



C. Naval — 1955 Resp.: B = 2 (C — A)

LINHAS PROPORCIONAIS. SEMELHANÇA

Dois segmentos de reta são proporcionais a dois outros. quando a razão dos comprimentos dos dois primeiros é igual à razão dos comprimentos dos dois outros, sendo todos êsses segmentos medidos com a mesma unidade.

Diz-se que um segmento dado é dividido interna ou externamente por um ponto, conforme êste é marcado sôbre o próprio segmento dado, ou sôbre o seu prolongamento.

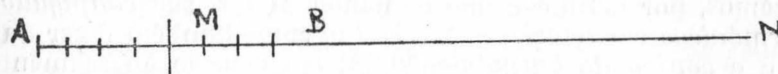


FIG. 1

O ponto M tomado sôbre o segmento AB, divide-o em dois segmentos *aditivos* (AM + MB = AB), enquanto que o ponto N divide AB em dois segmentos *substrativos* (NA — — NB = AB).

O ponto M divide *internamente* o segmento AB e o ponto N divide-o *externamente.*

Os segmentos AM e BN são *externos,* enquanto que o segmento MB é *interno.*

A relação

$$\frac{AM}{MB}$$ é a *razão de secção* do ponto M.

Do mesmo modo

$$\frac{AN}{BN} \text{ é a } \textit{razão de secção} \text{ do ponto N.}$$

A razão de secção tem sinal positivo ou negativo, de acôrdo com o sentido em que são contados os segmentos que nela entram.

Assim

$$\frac{AM}{MB} \text{ é positivo; } \frac{MA}{MB} \text{ é negativa}$$

$$\frac{AN}{BN} \text{ é positiva; } \frac{NA}{NB} \text{ é positiva}$$

Se os pontos M e N verificam a relação

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}, \quad (1)$$

dizemos, por definição que os pontos M e N são *conjugados harmônicos* em relação a A e B. Podemos também dizer que N é o *conjugado harmônico* de M em relação ao segmento AB.

A cada ponto M do segmento corresponde um conjugado harmônico. Quando o ponto M está no meio de AB, o conjugado harmônico é um ponto do infinito.

Sempre que tivermos a relação (1) dizemos que os pontos A, B, M e N formam uma *divisão harmônica.*

No caso do ponto M dividir internamente o segmento AB em duas partes tais que, uma delas seja média proporcional entre o segmento todo e a outra parte, dizemos que o ponto M divide o segmento AB em *média e extrema razão.* Assim:

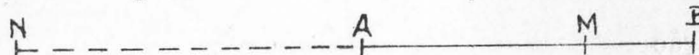


FIG. 2

Se tivermos

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AN} = \frac{AN}{NB}$$

teremos o segmento AB dividido *interna* e *externamente* em *média e extrema razão* AM e AN são os *segmentos áureos interno* e *externo* de AB. Seus valôres aproximados são:

$$AM = 0{,}618\,AB \quad \text{e} \quad AN = -1{,}618\,AB$$

Quando dizemos, apenas, *segmento áureo* estamos nos referindo ao segmento *áureo interno.* É conveniente frisar que *divisão harmônica* e *divisão em média e extrema razão* (*divisão áurea*) de segmentos, são assuntos diferentes e só foram tratados um após outro, no presente capítulo, em virtude da semelhança de ambos.

Na figura 2 não temos o segmento AB dividido harmônicamente pelos pontos M e N, pois para que assim fôsse o ponto N teria que estar à direita de B, de vez que o ponto M está mais próximo de B.

O segmento áureo do raio de um círculo é o lado do decágono regular inscrito no mesmo círculo.

Teorema 1

Se várias paralelas determinam segmentos iguais sôbre uma transversal, determinam também segmentos iguais sôbre qualquer outra transversal, desde que os dois segmentos não tenham uma medida comum, isto é, quando forem incomensuráveis.

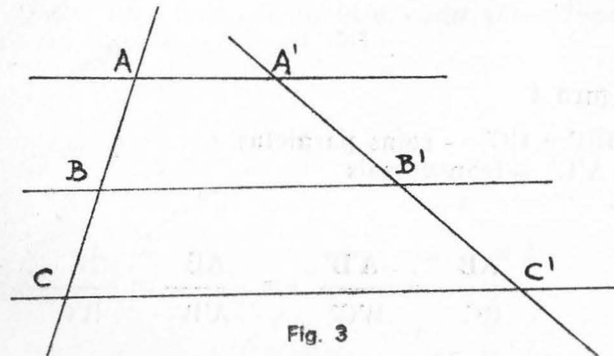


Fig. 3

Na figura 3

AA', BB' e CC' — paralelas
AC — transversal dividida em partes iguais AB e BC, pelas paralelas.

A'C' — transversal qualquer.

Relação

A'B' = B'C' porque AB = BC

Teorema 2

Retas paralelas, determinam sôbre duas transversais segmentos proporcionais.

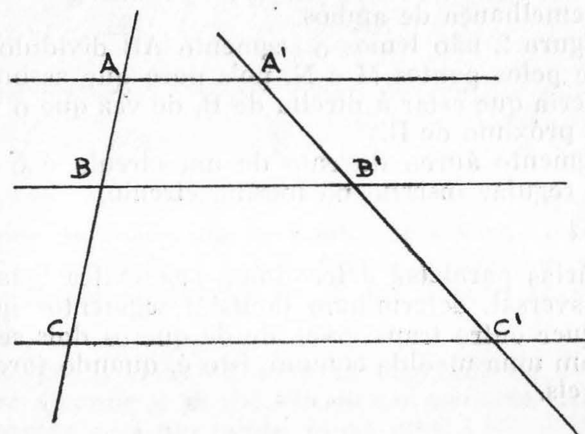


FIG. 4

Na figura 4

AA', BB' e CC' — retas paralelas
AC e A'C' — transversais

Relação

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ ou } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Teorema 3

Toda a paralela a um lado de um triâgulo divide os outros dois lados na mesma razão.

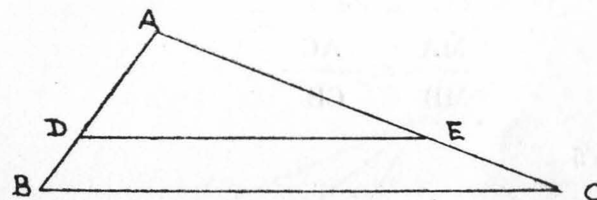


FIG. 5

Na figura 5

ABC — triângulo
DE — paralela ao lado BC do triângulo

Relação

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Teorema 4

A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos aditivos, proporciónais aos lados do ângulo.

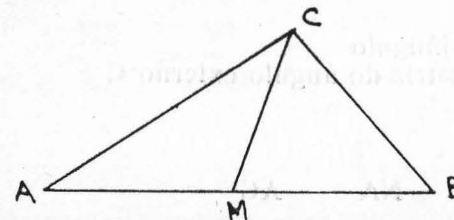


FIG. 6

Na figura 6

ABC — triângulo
CM — bissetriz do ângulo C

Relação

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{CB}$$

Teorema 5

A bissetriz de um ângulo externo de um triângulo determina sôbre o lado aposto, segmentos subtrativos, proporcionais aos outros dois lados.

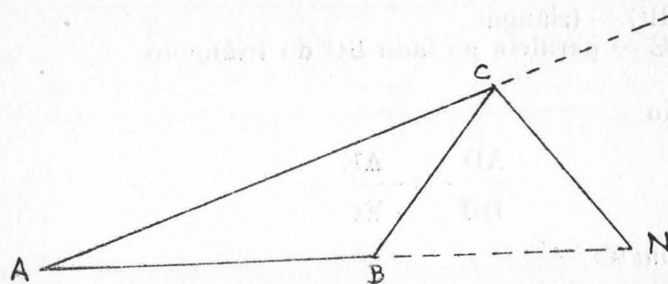


FIG. 7

Na figura 7

ABC — triângulo
CN — bissetriz do ângulo externo C

Relação

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AC}{CB}$$

Teorema 6

As bissetrizes de um ângulo interno e do externo adjacente de um triângulo, dividem o lado aposto harmônicamente.

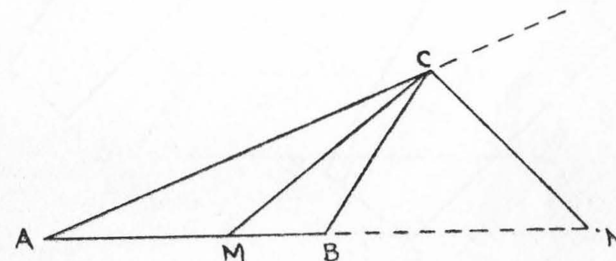


FIG. 8

Na figura 8

ABC — triângulo

CM — bissetriz do ângulo interno C

CN — bissetriz do ângulo externo C

Relação

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

Semelhança

Dois polígonos são semelhantes quando têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais.

Lados homólogos são os lados adjacentes aos ângulos respectivamente iguais.

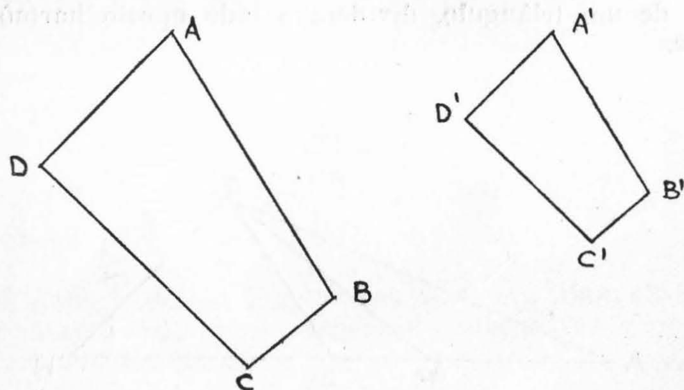


FIG. 9

Se tivermos os ângulos:

$$A = A'; B = B'; C = C' \text{ e } D = D'$$

e se os lados homologos guardam a relação

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$

os polígonos da figura, são semelhantes.

A relação entre os lados homólogos acima escrita, representam a *razão de semelhança* ou *escala.*

As relações acima podem ser igualadas à razão do perímetro dos dois polígonos, isto é,

$$\frac{2p}{2p'}$$

Teorema de Tales

Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo, forma com os outros dois lados um triângulo semelhante ao primeiro.

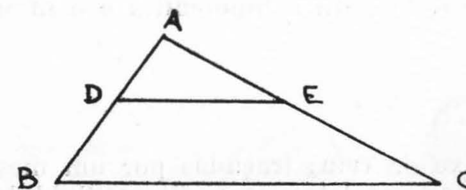


FIG. 10

Na figura 10

ABC — triângulo
DE — paralela ao lado BC.

Relação

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Se a reta DE fôr traçada pelo meio de ÀB e consequentemente pelo meio de ÀC, ela será igual à metade de BC, como é fácil de ver pela relação.

CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1) Dois triângulos são semelhantes quando têm dois ângulos respectivamente iguais.

2) Dois triângulos são semelhantes quando têm um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais.

3) Dois triângulos são semelhantes quando têm os lados proporcionais.

4) Dois triângulos são semelhantes quando têm os lados respectivamente paralelos ou perpendiculares.

Tratando-se de *triângulos retângulos,* temos o caso especial de semelhança.

Dois triângulos retângulos são semelhantes quando a razão de um cateto para a hipotenusa é a mesma nos dois triângulos.

Teorema 7

Se um feixe de retas traçadas por um mesmo ponto é cortado por duas paralelas, essas ficam divididas em partes proporcionais.

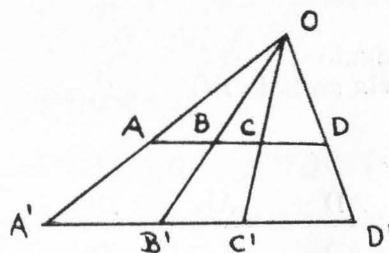


FIG. 11

Na figura 11

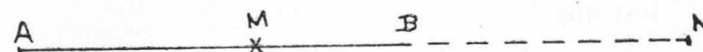
OA', OB', OC' e OD' — feixe de concurrentes no ponto *o*
AD e A'D' — paralelas

Relação

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Dividir harmônicamente, na razão $^3/_2$, o segmento AB de 12 cm.



A razão (de secção) sendo $^3/_2$, e representando

$\frac{MA}{MB}$; segue-se que MA>MB;

como dissemos o ponto N ficará à direita de B que está mais perto de M.
Teremos então:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Como MA e MB são aditivos teremos:

$$MA + MB = AB = 12 \quad (2)$$

Então as equações (1) e (2) permitem resolver o problema com o auxílio das proporções:

Teremos:

$$\frac{MA + MB}{MB} = \frac{3+2}{2} \quad \text{ou}$$

$$\frac{12}{MB} = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad MB = \frac{12 \times 2}{5} = 4{,}8 \text{ cm}$$

Depois disso, teremos:

$$MA = 12 - 4{,}8 = 7{,}2 \text{ cm}$$

Como

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

teremos

$$\frac{NA}{NB} = \frac{3}{2}$$

E as proporções permitem achar os valôres de NA e NB, que são segmentos subtrativos.

Teremos:

$$\frac{NA - NB}{NA} = \frac{3-2}{3} \quad \text{ou}$$

$$\frac{12}{NA} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad NA = 36 \text{ cm}$$

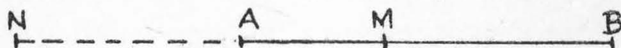
Como

$$NA - NB = AB$$

Segue-se que

$$36 - 12 = NB \quad \text{e} \quad NB = 24 \text{ cm}$$

2) Um segmento AB está dividido harmônicamente pelos pontos M e N; sabendo-se que os segmentos aditivos MA e MB medem 5 cm e 7 cm respectivamente, calcular os subtrativos.



MA e MB valendo 5 cm e 7 cm, o segmento AB vale 12 cm e a razão de secção é $^5/_7$.

Então:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{5}{7} \quad \text{ou}$$

$$\frac{NB}{NA} = \frac{7}{5} \quad \text{ou}$$

$$\frac{NB - NA}{NA} = \frac{7-5}{7} \quad \text{ou}$$

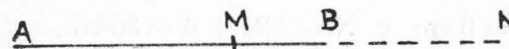
$$\frac{12}{NA} = \frac{2}{7} \quad \text{e} \quad NA = \frac{12 \times 7}{2} = 42 \text{ cm}$$

Consequentemente

$$NB = NA + AB \quad \text{ou}$$

$$NB = 42 + 12 = 54 \text{ cm}$$

3) Um segmento $AB = 24$ cm foi dividido harmônicamente pelos pontos M e N. Sabe-se que MN tem 10 cm. Calcular os quatro segmentos da divisão harmônica.



A figura nos mostra que:

$$NA = NM + MA$$

Por outro lado

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \quad \text{que nos permite escrever:}$$

$$\frac{MA + MB}{MA} = \frac{NA + NB}{NA} \quad \text{ou}$$

$$\frac{MA + MB}{MA} = \frac{NM + MA + NA - AB}{NM + MA} \quad \text{ou}$$

$$\frac{MA + MB}{MA} = \frac{NM + MA + NM + MA - AB}{NM + MA} \quad \text{ou}$$

$$\frac{24}{MA} = \frac{2MA - 4}{10 + MA} \quad \text{ou}$$

$$2\,MA^2 - 28\,MA - 240 = 0 \quad \text{ou}$$

$$MA^2 - 14\,MA - 120 = 0$$

que resolvida dá:

$$MA = 20 \quad \text{e} \quad MA = -6$$

A resposta $MA = -6$ não serve porque MB teria que ser 18 e como $MN = 10$, haveria uma contradição. Sendo $MA = 20$ cm; MB será 4 cm e $NB = 10 - 4 = 6$ cm e $NA = 24 + 6 = 30$ cm.

4) Um segmento AB mede 32 cm. Um ponto **M** entre A e B determina dois segmentos MA e MB, cuja razão do primeiro para o segundo é 3. Sendo **N** o conjugado harmônico de M, calcular MN.



O problema diz que $AB = 32$ cm e que

$$\frac{MA}{MB} = 3 = \frac{3}{1}$$

Depois disto

$$\frac{MA + MB}{MB} = \frac{3 + 1}{1} \quad \text{ou}$$

$$\frac{32}{MB} = \frac{4}{1} \quad \text{e} \quad MB = \frac{32}{4} = 8 \text{ cm}$$

Por outro lado:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MB} = \frac{3}{1} \quad \text{e}$$

$$\frac{NA - NB}{NB} = \frac{3 - 1}{1} \quad \text{ou}$$

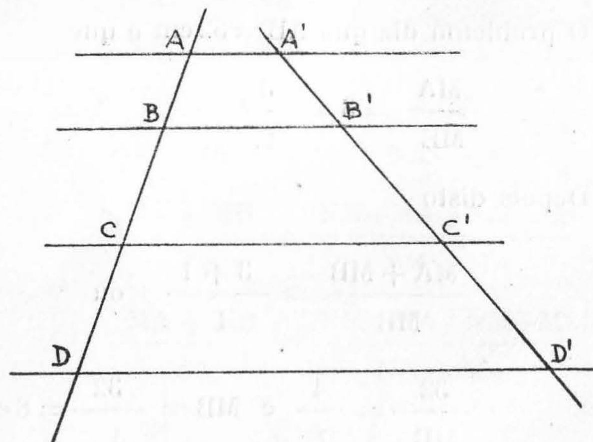
$$\frac{12}{NB} = \frac{2}{1} \quad \text{e} \quad NB = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

Como $NM = NB + MB$, segue-se que

$$NM = 6 + 8 = 14 \text{ cm}$$

5) Um feixe de quatro paralelas determina sôbre uma secante três segmentos de 3 m, 4 m e 5 m respectivamente. Calcular os segmentos determinados pelo

mesmo feixe sôbre outra secante, cujo comprimento total entre as paralelas externas é de 48 m.



O teorema 2 permite escrever:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Um teorema de proporções nos permite escrever:

$$\frac{AB+BC+CD}{A'B'+B'C'+C'D'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

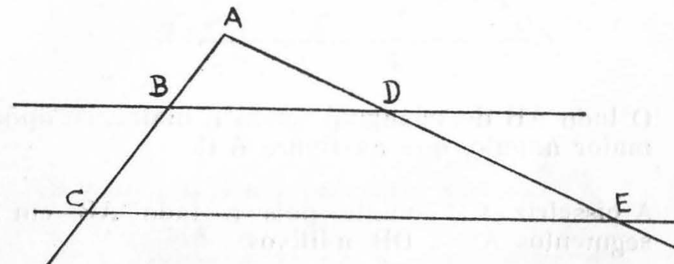
Como $A'B'+B'C'+C'D' = 48$ m, temos:

$$\frac{3+4+5}{48} = \frac{3}{A'B'} = \frac{4}{B'C'} = \frac{5}{C'D'} \quad \text{e}$$

Consequentemente

$A'B' = 12$ m $\quad B'C' = 16$ m e $C'D' = 20$ m

6) Duas retas partindo de um mesmo ponto A encontram duas paralelas. A primeira corta as paralelas em B e C e a segunda em D e E. Sabendo-se que $BC = 9$ cm; $DB = 4,5$ cm, $CE = 18$ cm e $AE = 10$ cm. Calcular AB, AD e DE.



Na figura tem-se dois triângulos ABD e ACE, que são semelhantes, em virtude do teorema de Tales. Então vem:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$

Substituindo os valôres dados, vem:

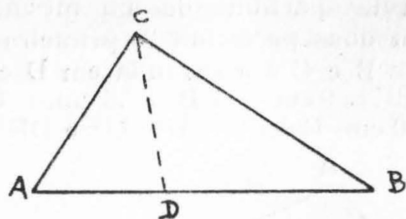
$$\frac{AB}{AB+9} = \frac{AD}{10} = \frac{4,5}{18}$$

que permite achar

$AD = 2,5$ cm; $AB = 3$ cm e $DE =$
$= 10 - AD = 7,5$ cm.

7) Num triângulo de lados 5 cm, 7 cm e 11 cm, respectivamente, determinar os segmentos que a bissetriz interna do ângulo maior determina sôbre o lado oposto.

E.N.C. Dutra — 1949.



O lado AB do triângulo sendo o maior, se opõe ao maior ângulo, que na figura é C.

A bissetriz CD divide pois o lado AB em dois segmentos AD e DB, aditivos.

O teorema 4 nos permite escrever

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} \quad \text{que nos dá:}$$

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AC + CB}{AC} \quad \text{ou}$$

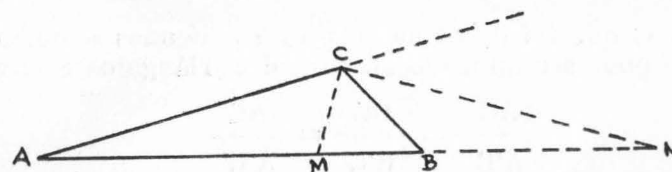
$$\frac{11}{AD} = \frac{5 + 7}{5} \quad \text{e} \quad AD = 4{,}58.\text{rm} \quad \text{e}$$

$$\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AC + CB}{CB} \quad \text{ou}$$

$$\frac{11}{DB} = \frac{5 + 7}{7} \quad \text{e} \quad DB = 6{,}42 \text{ cm}$$

8) Um triângulo tem para lados 10 cm, 15 cm e 20 cm. Do vértice oposto ao lado maior tiram-se as bissetrizes interna e externa do ângulo correspondente.

Calcular a distância dos pés dessas bissetrizes.



Os *teoremas 3 e 4* permitem escrever:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{CB} \quad \text{e} \quad \frac{NA}{NB} = \frac{AC}{CB}$$

Consequentemente:

$$\frac{MA + MB}{MB} = \frac{AC + CB}{CB} \quad \text{e}$$

$$\frac{NA - NB}{NB} = \frac{AC - CB}{CB}$$

Substituindo nas relações que acabamos de escrever os valôres dados no problema, depois de considerarmos $MA + MB = AB$ e $NA - NB = AB$, vem respectivamente

$$\frac{20}{MB} = \frac{15+10}{10} \quad \text{e} \quad \frac{20}{NB} = \frac{15-10}{10} \quad \text{ou}$$

$$MB = \frac{200}{25} = 8 \text{ cm} \quad \text{e} \quad NB = \frac{200}{5} = 40 \text{ cm}$$

A distância procurada é

$$NM = MB + NB = 8 + 40 = 48 \text{ cm}$$

9) Os três lados de um triângulo medem 6 m, 12 m e 15 m. Quais são os lados de um triângulo semelhante sabendo-se que o lado homólogo ao de 12 cm vale 4 cm.

O que foi dito com relação à polígonos semelhantes pode ser aplicado ao caso dos triângulos e teremos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

AB, BC e AC sendo os lados conhecidos do triângulo e A'B', B'C' e A'C' os do que queremos calcular, sendo que o lado B'C' também é conhecido. Teremos então:

$$\frac{6}{A'B'} = \frac{12}{4} = \frac{15}{A'C'} \quad \text{e}$$

consequentemente

$$A'B' = 2 \text{ cm} \quad \text{e} \quad A'C' = 5 \text{ cm}$$

10) No mapa de um estado, a distância medida entre duas cidades A e B é de 5 cm. Sabe-se que a distância real entre A e B é de 50 Km. Determinar a escala do mapa.
Escala é a relação entre o desenho e a realidade.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Desenho}}{\text{Realidade}}$$

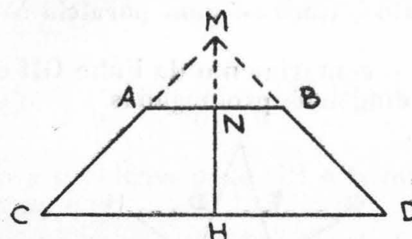
No problema temos:

$$\text{Escala} = \frac{5 \text{ cm}}{50 \text{ km}} = \frac{5 \text{ cm}}{5000000 \text{ cm}} =$$

$$= \frac{1}{1000000}$$

A escala é pois de 1 para um milhão.

11) As bases de um trapézio têm, respectivamente 12,5 cm e 9 cm e a altura 6,3 cm. Calcular as alturas dos triângulos obtidos ao se prolongar os lados não paralelos.



O problema dá as bases AB e CD do trapézio e a sua altura NH.

Por outro lado os triângulos MCD e MAB são semelhantes (teorema de Tales) e por isso podemos escrever:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{MH}{MN}$$

Como

$$MH = MN + NH$$ **podemos escrever**

$$\frac{CD}{AB} = \frac{MN + NH}{MN} \quad \text{ou}$$

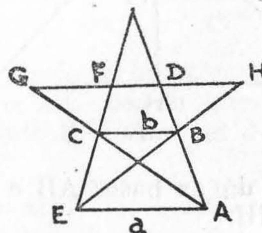
$$\frac{12,5}{9} = \frac{MN + 6,3}{MN},$$ **que resolvido dá:**

$$MN = 16,2 \text{ cm} \quad \text{e}$$

$$MH = 16,2 + 6,3 = 22,5 \text{ cm}.$$

12) Sôbre o prolongamento do lado AB de um trapézio toma-se um ponto tal que $\frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}$. Pelo ponto obtido, traça-se uma paralela às bases *a* e *b*.

Exprimir o comprimento da linha GH compreendida entre as diagonais prolongadas.



O problema dá:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{m}{n} \quad (1)$$

Os triângulos BHD e BEA, dão, por serem semelhantes

$$\frac{DH}{EA} = \frac{DB}{BA}$$

A relação (1) nos diz que AD = m e BD = n.

A figura nos mostra que

$$BA = AD - BD = m - n$$

Então:

$$\frac{DH}{a} = \frac{n}{m-n} \text{ e } DH = a.\frac{n}{m-n}$$

Por outro lado os triângulos ADG e ABC, são semelhantes e dão:

$$\frac{DG}{BC} = \frac{AD}{AB} \quad \text{ou}$$

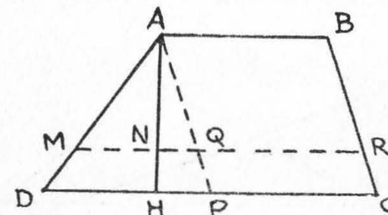
$$\frac{DG}{b} = \frac{m}{m-n} \quad \text{ou} \quad DG = b.\frac{m}{m-n}$$

Como o problema pede GH e temos, de acôrdo com a figura, que

$$GH = DG + DH, \text{ vem}$$

$$GH = \frac{an}{m-n} + \frac{bm}{m-n} = \frac{an+bm}{m-n}$$

13) As bases de um trapézio medem 14 cm e 21 cm respectivamente e a altura, 6 cm. A 1,8 cm da base maior traça-se uma paralela a essa base. Calcular o comprimento do segmento dessa paralela, compreendido entre os lados não paralelos do trapézio.



Na figura conhecemos: AB = PC = QR; CD, AH e NH e DP. Os triângulos ADP e AMQ são semelhantes e nos dão:

$$\frac{DP}{MP} = \frac{AH}{AN}$$

Da figura concluímos que

$$DP = DC - AB = 21 - 14 = 7 \text{ cm}$$
$$AN = AH - NH = 6 - 1{,}8 = 4{,}2 \text{ cm} \quad e$$

Então

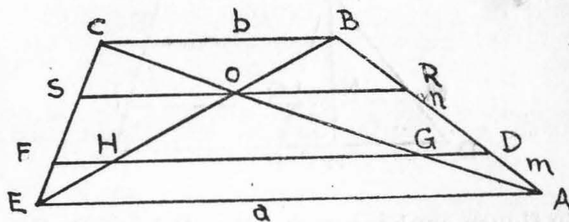
$$\frac{7}{MQ} = \frac{6}{4{,}2} \quad e$$

$$MQ = \frac{7 \times 4{,}2}{6} = 4{,}9 \text{ cm}$$

A figura também nos mostra que

$$MR = MQ + QR = 4{,}9 + 14 = 18{,}9 \text{ cm}$$

14) Divide-se o lado AB de um trapézio qualquer em duas partes AD e DB proporcionais a m e n. Pelo ponto obtido traça-se uma paralela às bases a e b. Exprimir o comprimento dessa paralela em função das bases e de m e n.



Na figura

$$AE = a; \quad BC = b; \quad DF = d \quad e \quad \frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$$

A diagonal AC, depois de traçada nos dá:

$$\frac{DG}{BC} = \frac{AD}{AB} \text{ (triângulos ABC e ADG) ou}$$

$$\frac{DG}{b} = \frac{m}{m+n} \quad e$$

$$DG = \frac{bm}{m+n}$$

os triângulos CEA e CFG dão:

$$\frac{FG}{EA} = \frac{CF}{CE}$$

Mas como

$$\frac{CF}{FE} = \frac{BD}{DA}$$

que também dá:

$$\frac{CF}{CE} = \frac{BD}{BA}, \text{ vem:}$$

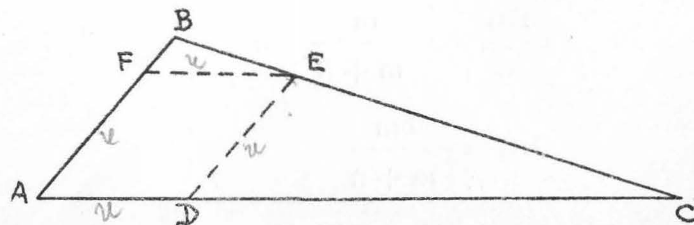
$$\frac{FG}{a} = \frac{n}{m+n} \quad e \quad FG = \frac{an}{m+n}$$

Como queremos FD e

$$FD = FG + GD, \quad \text{vem}$$

$$FD = \frac{an}{m+n} + \frac{bm}{m+n} = \frac{an + bm}{m+n}$$

15) De um ponto E sôbre o lado BC do triângulo ABC traçam-se paralelas aos lados AB e AC. (ED e EF). Calcular EC, de modo que ED = EF (ABC é um triângulo qualquer).



C. Naval — 1963

O problema pede EC de modo que se tenha ED=EF. Os triângulos CAB e CED, por serem semelhantes dão:

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{CD} \quad (1)$$

Por outro lado os triângulos BEF e EDC também são semelhantes e nos dão:

$$\frac{EF}{DC} = \frac{BE}{EC} \quad (2)$$

Como devemos ter EF = ED, podemos escrever a relação (2) como se segue:

$$\frac{ED}{DC} = \frac{BE}{EC} \quad (3)$$

Trocando-se os meios da proporção (1), vem:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ED}{CD} \quad (4)$$

As relações (3) e (4) mostram que o primeiro membro de (3) é igual ao segundo de (4) e por isso podemos escrever:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \quad \text{ou}$$

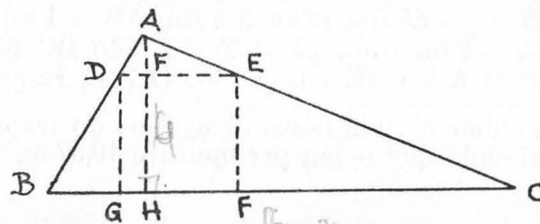
depois de aplicar uma propriedade das proporções:

$$\frac{AB + AC}{AC} = \frac{EB + EC}{EC} \quad \text{ou}$$

$$\frac{AB + AC}{AC} = \frac{BC}{EC} \quad \text{e}$$

$$EC = \frac{AC \times BC}{AB + AC}$$

16) Calcular o lado de um quadrado inscrito num triângulo cuja base tem 6 cm e a altura 4 cm.



Na figura temos um triângulo cujo lado BC = 6 cm e altura AH = 4cm.

Os triângulos ABC e ADE são semelhantes (DE paralela a BC; teorema de Tales).

Podemos então escrever:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AF}{AH}$$

Mas a figura nos mostra, uma vez que FH = EF, que:

$$AH = AF + EF \text{ ou } DG \text{ ou } DE \text{ ou } GF,$$

de vez que

$$FH = EF = DG = DE = GF$$

por ser a figura DEFG um quadrado.

Então podemos escrever:

$$\frac{DE}{6} = \frac{AH - DE}{4} \text{ ou}$$

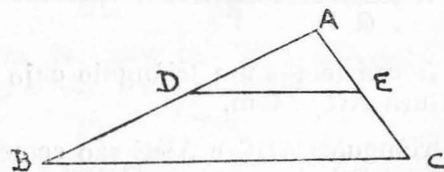
$$\frac{DE}{6} = \frac{4 - DE}{4} \text{ ou}$$

$$4\,DE = 24 - 6\,DE \text{ ou}$$

$$10\,DE = 24 \text{ e } DE = 2{,}4$$

17) Os lados de um triângulo são AB = 4 m; AC = 3 m; BC = 5 m. Uma paralela ao lado BC intercepta os lados AB e AC nos pontos D e E, respectivamente.

Calcular os três lados incógnitos do trapézio BDEC, sabendo que o seu perímetro é 10,57 m.



O teorema de Tales aplicado ao triângulo ABC, dá:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (1)$$

O problema diz que:

$$BD + DE + EC + 5 = 10{,}57 \quad \text{ou}$$
$$BD + DE + EC = 5{,}57 \quad (2)$$

Da figura tiramos:

$$AD = AB - BD \quad \text{ou} \quad AD = 4 - BD$$
$$AE = AC - EC \quad \text{ou} \quad AE = 3 - EC$$

Substituindo-se os valôres de AD e AE, na relação (1), vem:

$$\frac{4 - BD}{AB} = \frac{3 - EC}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Tratando-se de uma proporção continuada, podemos escrever:

$$\frac{4 - BD + 3 - EC + DE}{AB + AC + BC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{ou}$$

$$\frac{7 - (BD + EC) + DE}{4 + 3 + 5} = \frac{DE}{5} \quad (3)$$

A relação (2) permite escrever:

$$BD + EC = 5{,}57 - DE \quad (4)$$

Substituindo-se em (3), BD + EC pelo seu valor, vem:

$$\frac{7 - (5{,}57 - DE) + DE}{12} = \frac{DE}{5} \quad \text{ou}$$

$$\frac{7 - 5{,}57 + DE + DE}{12} = \frac{DE}{5} \quad \text{ou}$$

$$\frac{1{,}43 + 2\,DE}{12} = \frac{DE}{5} \text{ ou}$$

$$12\,DE = 7{,}15 + 10\,DE \text{ ou}$$

$$12\,DE - 10\,DE = 7{,}15 \text{ ou}$$

$$2\,DE = 7{,}15 \text{ e } DE = \frac{7{,}15}{2} = 3{,}575 \text{ m}$$

Substituindo-se o valor de DE na relação 1, vem:

$$\frac{AD}{4} = \frac{AE}{3} = \frac{3{,}575}{5}$$

Então:

$$AD = 2{,}86 \text{ m e } AE = 2{,}145 \text{ m}$$

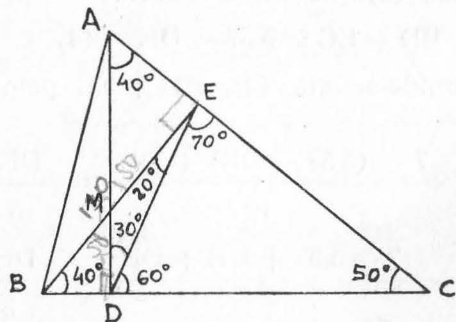
A figura nos mostra que

$$BD = AB - AD \text{ e } EC = AC - AE$$

Então:

$$BD = 4 - 2{,}86 = 1{,}14 \text{ m e } EC = 3 - 2{,}145 = 0{,}855\text{m}$$

18) AD e BE são alturas de um triângulo ABC, o ângulo ADE = 30° e o ângulo BED = 20°. Achar os ângulos do triângulo ABC.



A figura nos mostra fàcilmente que o ângulo DEC = 90° — 20° = 70° e o ângulo EDC = 90° — — 30° = 60°.

Sendo assim o ângulo C será C = 180° — (70 + 60) = = 50°.

No triângulo MED o ângulo EMD é:

$$EMD = 180 - (30 + 20) = 130°$$

No triângulo AME o ângulo AME é igual a 180° — — 130° = 50; o ângulo AEM é reto e o ângulo MAE será consequentemente 40° (90° — 50° = 40°).

Por outro lado, no triângulo MBD, o ângulo BMD = = 50°; o ângulo MDB é reto e o ângulo MBD é 40° (90° — 50° = 40°).

Os triângulos MAE e MBD são pois, semelhantes por terem os três ângulos iguais. Assim sendo, os lados homólogos são proporcionais e podemos escrever:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{ME}{MD} = \frac{AE}{BD}$$

Dessa relação de proporcionalidade concluimos que os lados MA e MB do triângulo AMB, são proporcionais aos lados ME e MD do triângulo EMD. Como os dois lados mencionados de cada um, formam ângulos iguais (AMB = EMD, opostos pelo vértice) concluimos que os dois triângulos AMB e EMD são semelhantes (2.° caso de semelhança de triângulos) e portanto os ângulos BAM e ABM valem respectivamente 20° e 30°.

Concluimos então que o ângulo CBA = 40° + 30° = = 70° e o ângulo CAB = 40° + 20° = 60°.

Os ângulos do triângulo são pois: 50°, 60° e 70°.

Depois da conclusão a que chegamos, estaremos em condições de afirmar que os triângulos ABC e EDC são semelhantes e que a reta ED é paralela à reta AB.

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) Dividir harmônicamente, na razão $^2/_3$, o segmento AB de 12 cm.

RESP.: MA = 4,8 cm; MB = 7,2 cm
NA = 24 cm e NB = 36 cm

2) Um segmento AB de 20 cm está dividido harmônicamente pelos pontos M e N; calcular os 3 outros segmentos da divisão harmônica e a razão, sabendo que o segmento NB é igual a 40 cm.

RESP.: NA = 20 cm; MA = $6\frac{2}{3}$ cm

MB = $13\frac{1}{3}$ cm; razão $^1/_2$

3) Um segmento AB tem 12 cm e a distância MN entre os conjugados harmônicos é 16 cm. Calcular os segmentos da divisão.

RESP.: 4 cm; 8 cm; 12 cm e 24 cm.

4) Um segmento AB mede 40 cm. Um ponto M entre A e B determina dois segmentos AM e MB cuja razão do primeiro para o segundo é 5. Calcular a distácia de B a N, sendo N conjugado harmônico de M.

RESP.: 10 cm

5) Um segmento AB está dividido por um ponto M em 2 segmentos de 12 m e 24 m. Prolonga-se êsse segmento até o ponto N, conjugado harmônico de M. Calcule NA.

I.E. — 1951 RESP.: NA = 36 m

6) Dado sôbre uma reta o segmento AB = 11 cm. Calcular o segmento MA dessa reta, sabendo-se que M divide AB externamente na razão $\frac{3}{4}$.

C. Naval — 1953 RESP.: MA = 33 cm.

7) O segmento AB estará dividido harmônicamente pelos pontos C e D se tiver a relação
DA + AC = DC + CB?

E. P. Cadetes — 1952 RESP.: Não

8) Dado o segmento AB = 16 cm e o ponto interior M dividindo AB na razão $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$, a que distância de A está situado o ponto N, conjugado harmônico de M?

C. Naval — 1958 RESP.: 24 cm

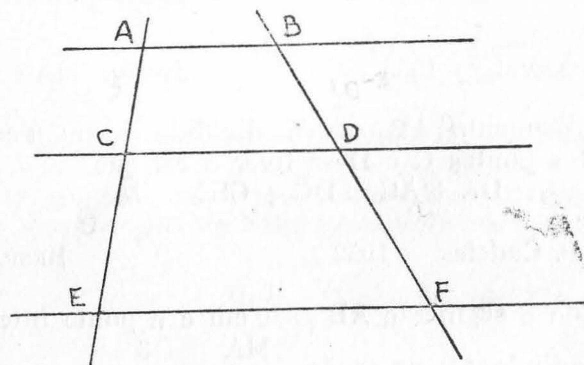
9) Um feixe de quatro paralelas determina sôbre uma transversal os pontos A, B, C e D e sôbre outra os pontos E, F, G e H. Sabendo que AB = 0,6 cm; BC = 1,5 cm CD = 2,75 cm e EH = 19,4 cm. Calcular EF, FG e GH.

RESP.: EF = 2,4 cm; FG = 6 cm e GH = 11 cm

10) Num triângulo de lados a = 7 cm; b = 9 cm e c = 10 cm, traça-se a bissetriz interna que parte do vértice A. Calcule a razão em que esta bissetriz divide o lado aposto.

C. Naval — 1953 RESP.: $\frac{9}{10}$ ou $\frac{10}{9}$

11) Na figura, as retas AB, CD e EF são paralelas. Sabe-se que AC = 3 cm; CE = 5 cm e BF = 10 cm. Calcule BD e DF.



E.P.C. Exército - 1952 RESP.: 3,75 cm e 6,25 cm

12) Os lados de um triângulo medem 10, 15 e 20 metros Calcular o menor dos segmentos em que a bissetriz interna divide o maior lado.

C. Naval — 1951 RESP.: 8 cm

13) Os lados de um triângulo medem 6 cm, 9 cm e 12 cm. Calcular os segmentos determinados sôbre o lado oposto pela bissetriz do maior ângulo interno.

C. Naval — 1953 RESP.: 4,8 cm e 7,2 cm

14) Os lados de um triângulo medem respectivamente, 4 cm, 5 cm e 6 cm. Calcular de quanto é preciso prolongar o lado maior para que êle encontre a bissetriz do ângulo externo oposto.

C. Naval — 1959 RESP.: 24 cm

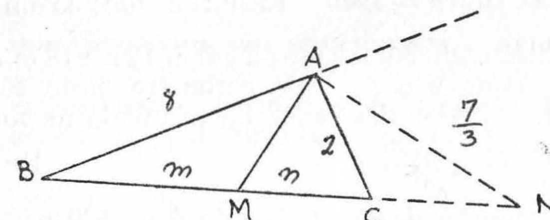
15) Um triângulo tem para lados 20 cm; 30 cm e 40 cm. Do vértice oposto ao maior lado, traçam-se as bissetrizes interna e externa do ângulo correspondente Calcular a distância entre os pés dessas bissetrizes.

C. Naval — 1952 RESP.: 96 cm



16) No triâgulo abaixo tem-se: AC = 2 cm e AB = 8 cm. AN é a bissetriz externa e $CN = \frac{7}{3}$ cm. Calcular os segmentos determinados pela bissetriz interna sôbre o lado BC.

(Na figura, não está figurada a bissetriz AM, que deve ser traçada por aquêle que vai resolver o problema.)



C. Naval — 1961 RESP.: 5,6 cm e 1,4 cm

17) As bissetrizes interna e externa do ângulo A, de um triângulo ABC, interceptam o lado BC e seu prolongamento em M e N respectivamente; sabendo que BM = 5 m e CM = 3 cm, calcular CN.

RESP.: 12 m

18) O lado a de um triângulo ABC tem 12 cm e o perímetro 27 cm. Calcular os outros dois lados, sabendo-se que a distância entre as interseções das bissetrizes interna e externa com o lado a e seu prolongamento é de 16 cm.

RESP.: 10 cm e 5 cm

19) Os três lados de um triângulo medem 6 cm, 15 cm e 18 cm. Quais os lados de um triângulo semelhante sabendo-se que a razão de semelhança ou escala do primeiro para o segundo é $^3/_4$?.

RESP.: 8 cm; 20 cm e 24 cm

20) O perímetro de um triângulo ABC é 45 cm; a bissetriz do ângulo A intercepta o lado BC num ponto M tal que MC = 6 cm e MB = 9 cm. Determinar os lados AB e AC do triângulo.

RESP.: AB = 18 cm e AC = 12 cm

21) Quais os lados de um triângulo de perímetro 10,5 m semelhante a outro triângulo de lados iguais a 3 dm; 50 cm e 0,7 m, respectivamente.

E.N.C. Dutra — 1949 RESP.: 21 dm; 35 dm e 49 dm

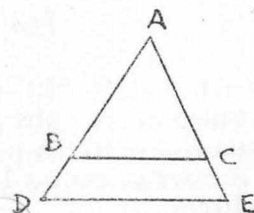
22) Um triângulo cujos lados medem 12 m; 18 m e 20 m é semelhante a outro cujo perímetro mede 10 m. Calcular o maior dos lados do triângulo menor.

C. Naval — 1951 RESP.: 4 m

23) O perímetro de um triângulo é de 120 m; um dos lados tem 45 m. Qual o perímetro do triâgulo semelhante cujo lado homólogo ao lado dado é de 30 m.

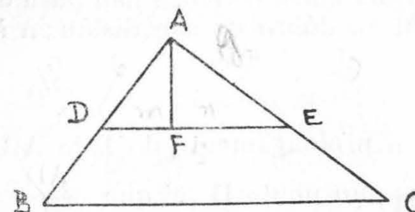
C. Naval — 1952 RESP.: 80 m

24) Na figura, sendo AB = 4 cm; BD = 3 cm e BC = 5 cm, calcule o valor do segmento DE.



E.P.C. Ar. — 1951 RESP.: 8,75 cm

25) Na figura abaixo tem-se AB = 18 m; AC = 27 m e BC = 15 m.



Sôbre AB, a partir de A, toma-se AD = 6 m e traça-se DE paralela a BC. Sendo AF a bissetriz do ângulo A, calcule os segmentos DF e EF.

I.E. — 1951 RESP.: DF = 2 m e EF = 3 m

26) Dois polígonos são semelhantes e uma das diagonais do primeiro é $^2/_5$ de sua homóloga no segundo. Determinar o perímetro do segundo polígono, sabendo que o do primeiro tem 14 cm.

RESP.: 35 cm

27) A distância entre dois pontos notáveis de uma cidade, tomada em uma planta, mede 50 cm. Sabendo que a escala da planta é de $^1/_{5000}$, determinar a distância real entre os pontos notáveis.

RESP.: 2500 m

28) Na planta de uma casa, um quarto está representado com as dimensões de 9,0 cm × 6,4 cm. Sendo o comprimento real do quarto igual a 4,50 m, qual será a sua largura.

E.P.C. Ar. — 1951 RESP.: 3,2 m

29) Num trapézio cujas bases têm respectivamente 16 cm e 10 cm e a altura 9 cm traça-se uma paralela às bases. Determinar o segmento da paralela compreendida entre os lados não paralelos, sabendo que é igual ao dôbro de sua distância à base menor.

RESP.: 15 cm

30) Sôbre o prolongamento do lado AB de um trapézio toma-se um ponto D tal que $\frac{AD}{DB} = 6$.

Pelo ponto obtido, traça-se uma paralela às bases que medem 4,5 cm e 18 cm. Calcular o comprimento da paralela compreendida entre as diagonais prolongadas do trapézio.

RESP.: 9 cm

31) No mesmo problema, calcular o comprimento da paralela às bases traçados pelo vértice do triângulo obtido pelo prolongamento dos lados não paralelos do trapézio e compreendida entre as diagonais prolongadas.

RESP.: 12 cm

32) Sabe-se que AB = 50 cm; BC = 7 cm, AC = 6 cm, são os lados de um triângulo ABC. Sôbre o prolongamento de AB toma-se um ponto D pelo qual se traça a paralela a BC que corta o prolongamento de AC em E. Calcule o perímetro do triângulo ADE obtido quando AD = 8 cm.

E.P.C.Ar. — 1963 RESP.: 28,8 cm

33) Em um triângulo ABC cujos lados são: AB = 10 cm; AC = 18 cm e BC = 15 cm, marca-se um ponto E sôbre o lado BC e traçam-se por êle paralelas aos outros dois lados (EF e ED). Calcular EC de modo que ED = EF.

RESP.: 9,64 cm

34) Num triângulo de lados AB = 12 m; BC = 14 m e AC = 18 m. Calcular DC de modo que DE = DF, sabendo que DF é paralela a AB e DE paralela a AC

C. Naval — 1959 RESP.: 8,4 m

35) A base AB de um triângulo mede 16 dm e a altura CH, 2 metros. Inscreve-se nesse triângulo um retângulo DEFG, semelhante a outro cujas dimensões são 6 dm e 8 dm. Pede-se o perímetro do retângulo DEFG.

RESP.: 35 dm

36) Unem-se os pontos médios dos lados de um triângulo. Achar a razão entre o perímetro do triângulo obtido e o do dado.

RESP.: $\frac{1}{2}$

37) Pelos pontos A e B de uma reta, traçam-se perpendiculares e sôbre elas tomam-se os segmentos AC = 13 dm e BD = 7 dm. No segmento AB, que mede 25 dm toma-se um ponto P tal que os ângulos APC e BPD sejam iguais. Calcular AP e BP.

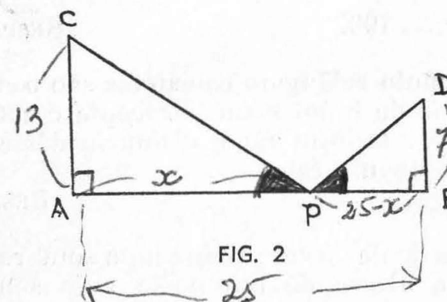


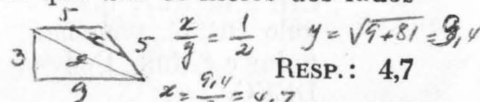
FIG. 2

C. Naval — 1958 RESP.: 16,25 dm e 8,75 dm

38) As bases de um trapézio medem 6 m e 8 m e a altura 4,5 m. Calcular as distâncias do ponto de intersecção das diagonais às bases do trapézio.

RESP.: 2,57 m e 1,93 m

39) Os lados de um trapézio retângulo são 5, 3, 5 e 9. Quanto vale o segmento que une os meios dos lados iguais.



E.N.C. Dutra — 1951 RESP.: 4,7

40) As bases de um trapézio medem 8 m e 12 m e os lados 3 m e 5 m. Calcular os dois lados do triângulo que se obtem prolongando os lados do trapézio.

C. Naval — 1959 RESP.: 9 m e 15 m

41) Num retângulo ABCD de lados AB = 12 cm e CB = 9 cm, a reta que liga o vértice C ao meio M de AB, intercepta a diagonal BD em I. Calcular as distâncias daquêle ponto aos lados do retângulo.

RESP.: 3 cm e 4 cm

42) Divide-se o lado BC de um trapézio em dois segmentos BF e CF proporcionais a 3 e 2. Pelo ponto F traça-se EF, paralela às bases. Calcular EF, sendo AB = 38,5 m e CD = 12,45 m.

E. Militar — 1937 RESP.: 22,87 m

43) Num triângulo retângulo os catetos são 5 cm e 2 cm. A mediatriz da hipotenusa intercepta o cateto maior no ponto M. Determinar a distância dêsse ponto ao vértice do ângulo reto.

RESP.: 2,1 cm

44) Se uma haste de 50 cm produz uma sombra de 20 cm, calcular a altura de um poste cuja sombra é de 3 m na mesma ocasião.

RESP.: 7,5 m.

45) Em um triângulo ABC a bissetriz do ângulo A encontra o lado BC num ponto D situado a $^1/_4$ do comprimento dêsse lado a partir de B. Calcule quantas vêzes o lado AC contém o lado AB.

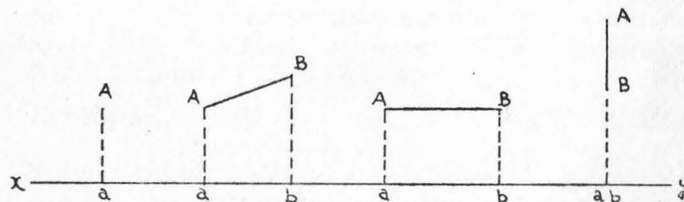
E.N.C. Dutra — 1955 RESP.: AC = 3 AB

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Projeção ortogonal de um ponto sôbre uma reta é o pé da perpendicular trançada dêsse ponto, sôbre a reta.

Projeção ortogonal de um segmento de reta sôbre uma reta é o segmento de reta compreendido entre as projeções dos extremos do segmento de reta, sôbre a reta.

Assim:



Na figura temos, a partir da esquerda.

a — projeção do ponto A sôbre xy.

ab — projeção do segmento AB, oblíquo à xy.

ab — (verdadeira grandeza — projeção do segmento AB paralelo a xy;

ab) — projeção do segmento AB, perpendicular a xy (um ponto).

Teorema 1

A hipotenusa é igual à soma das projeções dos catetos *b* e *c* sôbre ela.

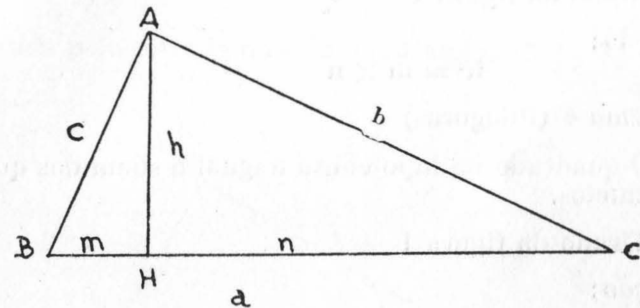


FIG. 1

Na figura 1

ABC — triângulo retângulo; Â = 90°
a — hipotenusa
b e *c* — catetos
m e *n* — projeções dos catetos c e b sôbre a hipotenusa ou segmentos em que a altura divide a hipotenusa.
h — altura relativa à hipotenusa.

Relação:

$$a = m + n$$

Teorema 2

Qualquer cateto é média proporcional entre a hipotenusa e sua projeção sôbre ela, isto é, *m* e *n*.

Reportando-nos à figura 1

Relação:

$$b^2 = an \quad e \quad c^2 = am$$

Teorema 3

A altura *h* é média proporcional entre os sêgmentos que determina sôbre a hipotenusa.

Ainda na figura 1

Relação:

$$h^2 = m \times n$$

Teorema 4 (Pitagoras)

O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Tirado da figura 1

Relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema 5

O produto da altura relativa à hipotenusa pela hipotenusa, é igual ao produto dos catetos.

Relação:

$$ah = bc$$

Triângulo Pitagorico é o triângulo retângulo que tem para lados, números inteiros.

Pode ser determinado com o auxílio da expressão.

$$(p^2 + q^2) = (p^2 - q^2) + (2\,pq)^2,$$

que é a *identidade de Platão* e na qual *p* e *q* podem ter quaisquer valôres que não sejam zero.

O triângulo Pitagórico mais notável é o que tem para lados os números 3, 4 e 5 e para área 6, qualquer que seja a unidade considerada.

É obtido, fazendo-se na identidade de Platão, *p* e *q* iguais a 2 e 1, respectivamente.

Teorema 6

O cateto aposto ao ângulo de 30º é igual à metade da hipotenusa e o aposto ao ângulo de 60º, é igual à hipotenusa multiplicada pela metade da raiz quadrada de 3 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

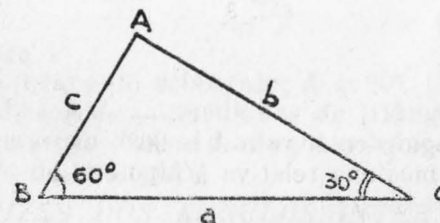


FIG. 2

Na figura 2

ABC — triângulo retângulo

$$\hat{A} = 90^\circ \quad \hat{B} = 60^\circ \quad e \quad \hat{C} = 30^\circ$$

Relação:

$$c = \frac{a}{2} \quad e \quad b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Teorema 7

A mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da hipotenusa.

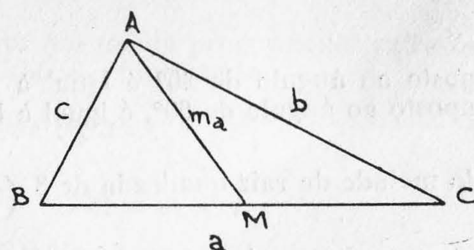


FIG. 3

Na figura 3

ABC — triângulo retângulo A = 90°
AM (m_a) — mediana relativa à hipotenusa

Relação:

$$m_a = \frac{a}{2}$$

Uma vez que tratamos da mediana relativa à hipotenusa, daremos às expressões que exprimem as medianas relativas aos catetos *b* e *c* respectivamente.

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3\,c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\,c^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4\,a^2 - 3\,b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3\,b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4\,b^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4\,a^2 - 3\,c^2}$$

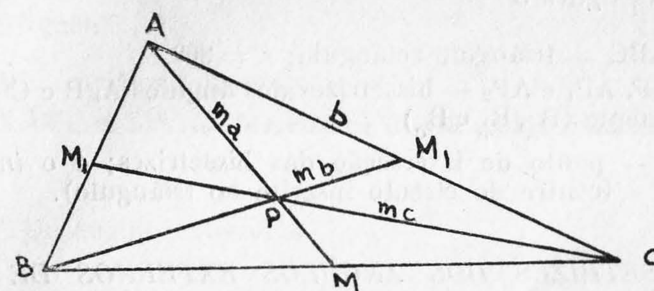


FIG. 4

Na figura 4
ABC — triângulo retângulo; Â = 90°
AM, AM_1 e AM_2 — medianas do triângulo
P — interseção das medianas; é o *baricentro* ou o *centro de gravidade* do triângulo.

BISSETRIZES DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Do ângulo A:

$$B_A = \frac{bc\sqrt{2}}{b + c}$$

Do ângulo B:

$$B_B = \frac{c}{a + c}\sqrt{2\,a\,(a + c)}$$

Do ângulo C:

$$B_C = \frac{b}{a + b}\sqrt{2\,a\,(a + b)}$$

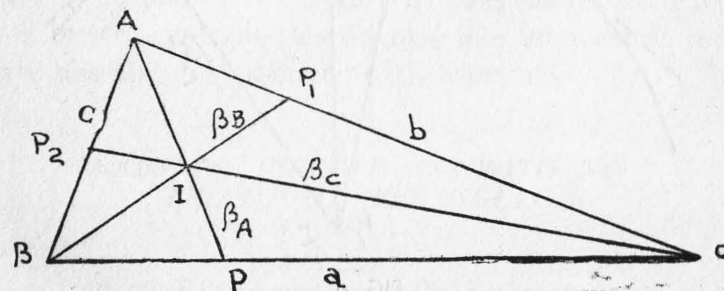


FIG. 5

Na figura 5

ABC — triângulo retângulo; $\hat{A} = 90^o$

AP, AP_1 e AP_2 — bissetrizes dos ângulos A, B e C respectivamente (B_A, B_B e B_C)

I — ponto de interseção das bissetrizes; é o *incentro*, (centro do círculo inscrito ao triângulo).

BISSETRIZES DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

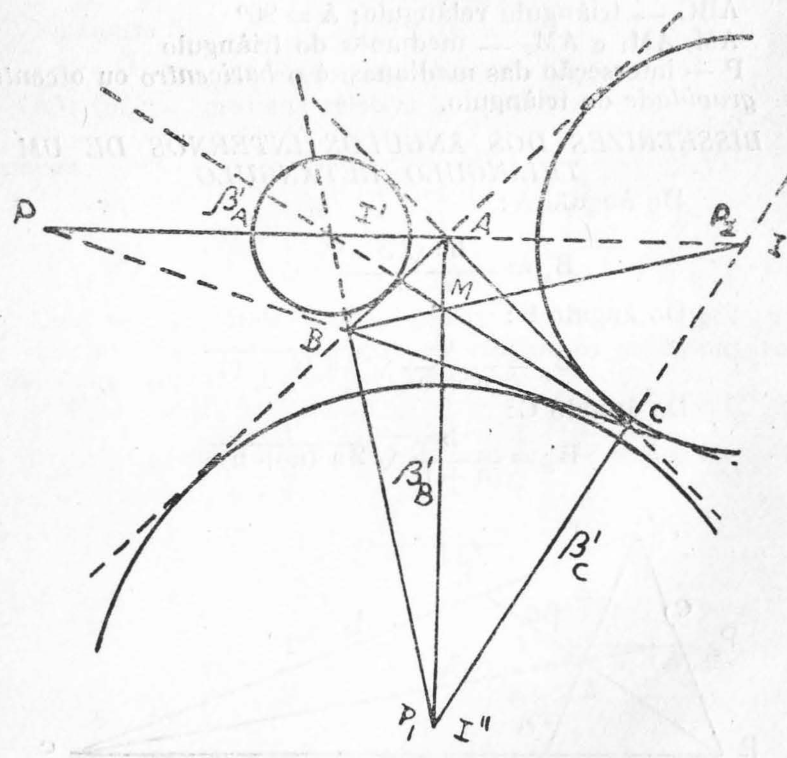


FIG. 6

Na figura 6

ABC — triângulo retângulo

AP, BP_1 e CP_2 — bissetrizes dos ângulos externos em A, B e C.

Do ângulo externo A

$$B'_A = \frac{bc\sqrt{2}}{b - c}$$

Do ângulo externo B

$$B'_B = \frac{c}{a - c}\sqrt{2a(a - c)}$$

Do ângulo externo C

$$B'_C = \frac{b}{a - b}\sqrt{2a(a - b)}$$

Ainda na figura

M — ponto de encontro das bissetrizes internas; *incentro*

I, I' I" — pontos de encontro de duas bissetrizes externas com a bissetriz interna dos ângulos não adjacentes; são os centros dos círculos ex-inscritos ao triângulo.

RAIO DO CÍRCULO INSCRITO NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

$$r = \frac{b + c - a}{2} \quad \text{ou} \quad r = \frac{bc}{2p}$$

A primeira expressão mostra que êle é igual à metade da diferença entre a soma dos catetos e a hipotenusa.

RAIO DO CÍRCULO CIRCUNSCRITO NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

$$R = \frac{a}{2}$$

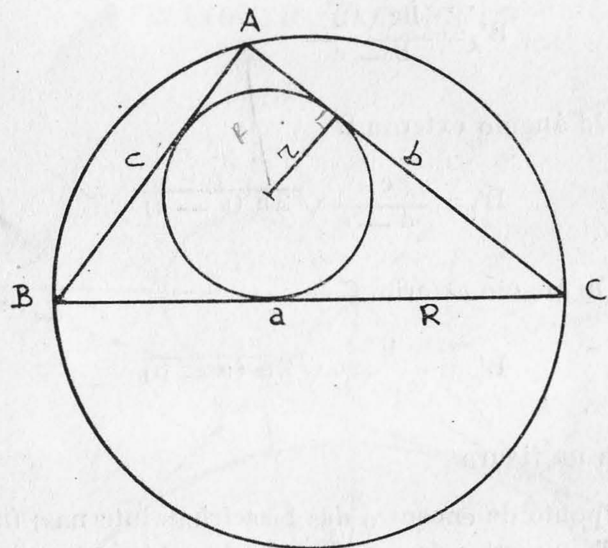


FIG. 7

Nas fórmulas apresentadas

a, b, c — lados do triângulo retângulo ABC da figura 7

R e r — raios dos círculos circunscrito e inscrito, respectivamente.

p — semi perímetro do triângulo

Teorema 8

Em todo triângulo retângulo, a soma dos catetos é igual à soma dos diâmetros dos círculos inscrito e circunscrito.

Na figura 7

R — raio do círculo circunscrito
r — raio do círculo inscrito
b e c — catetos
a = 2 R — hipotenusa

Relação:

$$b + c = 2R + 2r$$

DISTÂNCIA ENTRE OS CENTROS DOS CÍRCULOS CIRCUNSCRITO E INSCRITO EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

Teorema 9

Em *qualquer* triângulo a distância *d* do centro do círculo inscrito tendo *r* de raio, ao centro do círculo circunscrito de raio R é dada pela relação

$$d = R\,(R - 2r)$$

ALTURA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

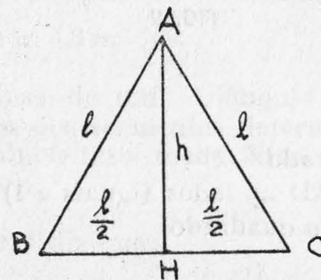


FIG. 8

Na figura 8

ABC — triângulo equilátero
AH (h) — altura do triângulo.

$$BH = CH = \frac{BC}{2}$$

AB, AC, BC — lados (iguais) 1

Relação:

$$h = \frac{1\sqrt{3}}{2}$$

DIAGONAL DO QUADRADO

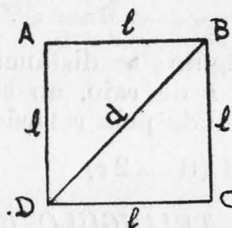


FIG. 9

Na figura 9

ABCD — quadrado
AB, AC, CD e AD — lados (iguais a l)
d — diagonal do quadrado

Relação:

$$d = l\sqrt{2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Num triângulo retângulo as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa valem 3,60 m e 6,40 m. Calcular os catetos; a hipotenusa e a altura.

A figura 1 do início do capítulo, nos permitiu escrever, de acôrdo com o *teorema 1*:

$$a = m + n, \quad \text{onde}$$

$$m = 3{,}60 \text{ e } n = 6{,}40 \text{ m.}$$

Então:

$$a = 3{,}60 + 6{,}40 = 10 \text{ m}$$

O *teorema 2* nos diz que:

$$b^2 = an \text{ e } c^2 = am, \quad \text{então}$$

$$b^2 = 10 \times 6{,}40 = 64 \text{ m}^2 \quad \text{e}$$

$$c^2 = 10 \times 3{,}60 = 36 \text{ m}^2 \quad \text{e}$$

$$b = 8 \text{ m} \quad \text{e} \quad c = 6 \text{ m.}$$

O *teorema 3*, nos diz que:

$$h^2 = m \times n \quad \text{ou}$$

$$h^2 = 3{,}60 \times 6{,}40 = 23{,}04 \text{ m}^2 \quad \text{e}$$

$$h = 4{,}8 \text{ m.}$$

2) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 50 m e um dos segmentos determinados pela altura sôbre a hipotenusa mede 30 m. Calcular a altura e os catetos.

O *teorema 1* diz que:

$$a = m + n$$

No problema $a = 50\,m$ e $m = 30\,m$

Então

$$n = a - m = 50 - 30 = 20\,m$$

O *teorema 2*, nos dá:

$$b^2 = an \quad e \quad c^2 = am$$

Então:

$$b^2 = 50 \times 20 = 1000\,m^2 \quad e$$
$$c^2 = 50 \times 30 = 1500\,m^2 \quad ou$$
$$b = 31{,}6\,m \quad e \quad c = 38{,}7\,m$$

O *teorema 3*, nos ensinou que

$$h^2 = m \times n \quad e$$
$$h^2 = 30 \times 20 = 600\,m^2 \quad e$$
$$h = 24{,}4\,m.$$

3) Os catetos de um triângulo retângulo valem 6 m e 8 m. Calcular a hipotenusa, as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa e a altura relativa à hipotenusa.

O *teorema 4*, dá:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

No problema $b = 6\,m$ e $c = 8\,m$, então:

$$a^2 = 36 + 64 = 100\,m^2 \quad e \quad a = 10\,m$$

O *teorema 5* nos fornece a relação

$$a\,h = b\,c \quad e \text{ então}$$

$$10 \times h = 6 \times 8 \quad e \quad h = \frac{48\,m^2}{10\,m} = 4{,}8\,m$$

Vimos também que

$$b^2 = an \quad e \quad c^2 = am$$
$$36 = 10\,n \quad e \quad 64 = 10\,m \quad e$$
$$n = 3{,}6 \quad e \quad m = 6{,}4$$

4) Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 10 m e a altura relativa à mesma mede 4,80 m. Calcular os catetos.

O *teorema 5* nos dá

$$a\,h = b\,c \quad ou$$
$$10 \times 4{,}80 = b\,c \quad ou$$
$$48 = b\,c \quad (1)$$

Por outro lado, o *teorema 4*, diz que:

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{isto é,}$$
$$100 = b^2 + c^2 \quad (2)$$

As equações (1) e (2) formam um sistema do 2.º grau, que resolvido dá:

$$b = 6\,m \quad e \quad c = 8\,m$$

5) Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo em que um dos catetos mede 18,3 m e a altura relativa à hipotenusa 11,7 m.

Do *teorema 4* tiramos

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad e \text{ do } 5$$
$$b\,c = a\,h.$$

Seja

$$c = 18{,}3\,m \quad e \quad h = 11{,}7\,m$$

Então

$$b^2 = a^2 - 18{,}3^2$$

$$18{,}3\,b = 11{,}7\,a \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} b^2 = a^2 - 334{,}89 & (1) \\ b = \dfrac{11{,}7\,a}{18{,}3} & (2) \end{cases}$$

As equações (1) e (2) formam um sistema que resolvido dá:

$$a = 24\text{ m} \quad \text{e} \quad b = 15{,}3\text{ m}$$

6) Num triângulo retângulo a hipotenusa vale 5 m e a diferença entre os catetos é de 1 m. Calcular os catetos.

O *teorema 4* dá:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

O problema diz que:

$$b - c = 1$$

Então

$$(1) \begin{cases} 25 = b^2 + c^2 \\ 1 = b - c \end{cases}$$

A resolução do sistema (1) nos dá:

$$b = 4\text{ m} \quad \text{e} \quad c = 3\text{ m}$$

7) O catetos de um triângulo retângulo são proporcionais aos números 3 e 4; sua soma é 28. Calcular a hipotenusa.

Podemos escrever:

$$\begin{cases} \dfrac{b}{c} = \dfrac{3}{4} \quad \text{e} \\ b + c = 28 \end{cases}$$

O sistema formado pelas duas equações dá:

$$b = 12\text{ m} \quad \text{e} \quad c = 16\text{ m}$$

A aplicação do *teorema 4* dá:

$$a^2 = 12^2 + 16^2 \quad \text{ou}$$
$$a^2 = 144 + 256 = 400 \quad \text{e} \quad a = 20\text{ m}$$

8) A soma dos catetos de um triângulo retângulo vale 21 m e a hipotenusa tem 15 m. Calcular os catetos.

Já sabemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{ou} \quad 225 = b^2 + c^2 \quad (1)$$

O problema da

$$b + c = 21 \quad (2)$$

As equações (1) e (2) formam um sistema que resolvido dá:

$$b = 9 \quad \text{e} \quad c = 12$$

9) Calcular os três lados de um triângulo retângulo sabendo-se que o perímetro vale 30 m e a diferença dos catetos é de 7 m.

O problema diz que:

$$2p = a + b + c = 30\text{ m} \quad (1)$$
$$b - c = 7\text{ m}. \quad (2)$$

A relação (1) pode ser escrita:

$$b + c = 30 - a,$$

que combinada com a relação (2) dá:

$$b = \frac{37 - a}{2} \quad (3) \qquad e \qquad c = \frac{23 - a}{2} \quad (4)$$

O *teorema 4* nos diz que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (5)$$

Substituindo b e c pelos valôres de (3) e (4), em (5), vem:

$$a^2 = \left(\frac{37 - a}{2}\right)^2 + \left(\frac{23 - a}{2}\right)^2$$

$$a^2 = \frac{1369 - 74\,a + a^2}{4} + \frac{529 - 46\,a + a^2}{4} \quad \text{ou}$$

$$a^2 + 60\,a - 949 = 0$$

que resolvida dá: $a = 13\,m$

Com êsse valor de *a*, teremos:

$$b = \frac{37 - 13}{2} = \frac{24}{2} = 12\,m \quad e$$

$$c = \frac{23 - 13}{2} = 5\,m$$

10) **Em um triângulo retângulo a hipotenusa excede os catetos, respectivamente de 1 m e 8 m. Quais são os três lados do triângulo?**

O problema nos diz que:

$$a - b = 1\,m \quad e \quad a - c = 8\,m$$

Podemos então concluir que:

$$b = a - 1 \quad e \quad c = a - 8$$

Êsses dois valôres substituidos no *teorema 4*, isto é,

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{dão} \quad a^2 = (a - 1)^2 + (a - 8)^2$$

que resolvida dá: $a = 13$ e consequentemente

$$b = 12\,m \quad e \quad c = 5\,m$$

11) **Calcular os lados de um triângulo retângulo, cujo perímetro tem 12 m e a altura relativa a hipotenusa 2,4 m.**

O problema diz que:

$$a + b + c = 12 \quad (1) \quad e \quad 2{,}4\,a = bc \quad (2)$$

Da relação (1) tiramos

$$b + c = 12 - a,$$

que elevada ao quadrado dá:

$$b^2 + 2\,bc + c^2 = 144 - 24\,a + a^2 \quad \text{ou}$$

$$b^2 + 2 \times 2{,}4\,a + c^2 = 144 - 24\,a + a^2 \quad \text{ou}$$

$$b^2 + c^2 = 144 - 24\,a + a^2 - 4{,}8a \quad \text{ou}$$

$$b^2 + c^2 = 144 - 28{,}8\,a + a^2 \quad (3)$$

Se considerarmos que

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (4)$$

e substituirmos em (3), $b^2 + c^2$, pelo seu valor a^2, vem:

$$a^2 = 144 - 28{,}8\,a + a^2 \quad \text{ou}$$

$$28{,}8\,a = 144 \quad e \quad a = \frac{144}{28{,}8} = 5\,m.$$

Achado o valor de a, teremos:

$$b + c = 12 - 5 = 7 \quad e$$
$$2{,}4 \times 5 = bc \quad ou \quad bc = 12$$

Tendo-se:

$$b + c = 7 \quad e \quad bc = 12$$

obteremos:

$$b = 4 \quad e \quad c = 3,$$

se resolvermos o sistema.

12) **Calcular os três lados de um triângulo retângulo cuja soma é 30 m e cuja soma dos seus quadrados é 338 m²**

O problema permite escrever:

$$a + b + c = 30 \quad (1) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 338 \quad (2)$$

Por se tratar de triângulo retângulo

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad (3)$$

Substituindo-se esse valor de $b^2 + c^2$ na equação (2), vem:

$$a^2 + a^2 = 338; \quad 2a^2 = 338$$
$$a^2 = 169 \quad e \quad a = 13 m$$

Substituindo-se esse valor em (1) e (2), vem:

$$b + c = 30 - 13 = 17 \quad (4)$$
$$b^2 + c^2 = 338 - 169 = 169 \quad (5)$$

As equações (4) e (5) formam um sistema que resolvido dá:

$$b = 12 m \quad e \quad c = 5 m$$

13) **Num triângulo retângulo um dos ângulos agudos vale 30°. O cateto aposto a esse ângulo vale 10 m. Calcular o outro cateto e a hipotenusa.**

O *teorema 6* diz que, no caso

$$a = 2 \times 10 = 20 m \quad e$$

$$b = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} = 17{,}32 m.$$

14) **A altura de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa mede 12 m e as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa diferem de 7 m. Calcular os lados desse triângulo.**

O *teorema 3* nos permite escrever:

$$h^2 = mn = 144 \quad (1)$$

e o enunciado do problema

$$m - n = 7 \quad (2)$$

As equações (1) e (2) formam um sistema que resolvido dá:

$$m = 16 \quad e \quad n = 9$$

Como

$$a = m + n, \text{ teremos:}$$
$$a = 16 + 9 = 25 m.$$

O *teorema 2* nos permite escrever:

$$b^2 = an \quad e \quad c^2 = am$$

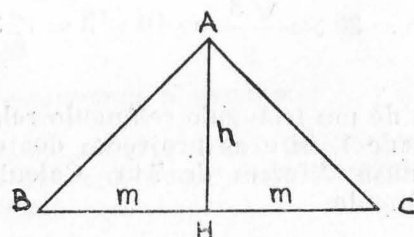
e consequentemente obter

$$b^2 = 25 \times 9 \quad e \quad c^2 = 25 \times 16,$$

que nos dão:

$$b = 15\,m \quad e \quad c = 20\,m$$

16) Num triângulo retângulo, isósceles a altura que cai sôbre a hipotenusa mede 4 m. Calcular os lados do triângulo.



O triângulo ABC, retângulo em A e isósceles fica decomposto em dois triângulos iguais, quando traçamos a altura AH, relativa à hipotenusa.

Já vimos que:

$$h^2 = m \cdot n \quad \text{e no caso}$$
$$h^2 = m \cdot m = m^2 \quad e \quad h = m = 4 \text{ metros}$$

Sendo assim e como

$$a = m + n,$$

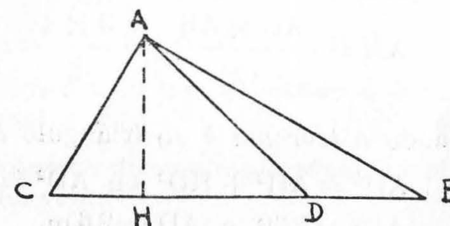
no caso em questão. teremos

$$a = m + m = 2m = 8 \text{ metros.}$$

Sendo $b = c$

$$a^2 = b^2 + b^2 \quad ou \quad a^2 = 2b^2 \quad ou$$
$$64 = 2b^2 \quad e \quad b^2 = 32 \quad e \quad b = c = 5{,}6m$$

16) Os catetos de um triângulo retângulo são 3 m e 4m. Sobre a hipotenusa, a uma distância de 2 m de um dos vértices, marca-se um ponto. Calcular a distância dêsse ponto ao vértice do ângulo reto.



Na figura, AC = 3 m; AB = 4 m e BD = 2m. Queremos calcular AD. CH e BH são projeções dos catetos sobre a hipotenusa e AH a altura relativa à hipotenusa.

Para calcularmos a hipotenusa usaremos o *teorema 4* e vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad ou$$
$$a^2 = 9 + 16 = 25 \quad e \quad a = 5$$

Determinemos o valor da projeção BH.
O *teorema 2*, dá:

$$AB^2 = BC \times BH \quad e$$
$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{16}{5} = 3{,}2\,m.$$

Podemos escrever:

$$DH = BH - DB \quad ou \quad DH = 3{,}2 - 2 = 1{,}2m$$

O triângulo AHD é retângulo; para calcular sua hipotenusa AD, que é o elemento procurado, calculemos AH, por meio do *teorema 5.*

Vem:

$$AH \times CB = AC \times AB \quad e$$

$$AH = \frac{AC \times AB}{CB} = \frac{3 \times 4}{5} = 2,4\,m$$

Aplicando o *teorema 4* ao triângulo AHD, vem:

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 \text{ ou } AD^2 = 5,76 + 1,44 \text{ ou}$$

$$AD^2 = 7,20 \text{ e } AD = 2,6\,m.$$

Êste exercício pode ser resolvido por intermédio do teorema de Stewart apresentado em outro capítulo.

17) Calcular a altura de um triângulo equilátero cujo lado tem 12 m.

Vimos que:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Então:

$$h = \frac{12 \times \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} = 10,38\,m.$$

18) O lado de um triângulo equilátero excede a altura de 3,59 m. Calcular o lado.

Pelo enunciado do problema podemos escrever:

$$l - h = 3,59 \text{ ou } l - \frac{l\sqrt{3}}{2} = 3,59 \text{ ou}$$

$$\frac{l(2-\sqrt{3})}{2} = 3,59 \quad e$$

$$l = \frac{2 \times 3,59}{2-\sqrt{3}} = \frac{7,18}{0,27} = 26,50\,m$$

19) O perímetro de um quadrado é 20 m. Calcular sua diagonal.

O perímetro do quadrado sendo igual ao quádruplo do lado, vem:

$$2p = 4l, \text{ segue-se que}$$

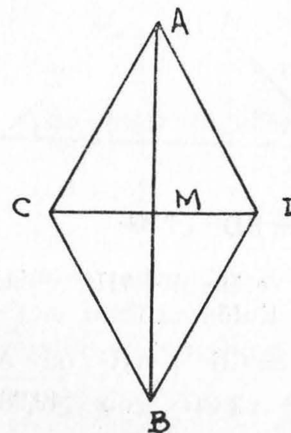
$$20 = 4l \quad e \quad l = 5\,m.$$

Vimos que a diagonal do quadrado é:

$$d = l\sqrt{2}; \quad \text{então}$$

$$d = 5\sqrt{2} = 5 \times 1,41 = 7,05\,m.$$

20) O perímetro de um losango tem 20 dm. A diagonal menor é igual ao lado. Calcular a diagonal maior.



O problema diz que CD = AC. Como o perímetro é 20 dm, segue-se que o lado

$$AC = \frac{20\,dm}{4} = 5\,dm$$

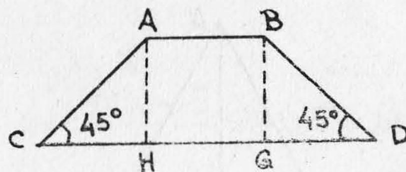
Como CD = AC, segue-se que o triângulo ACD é equilátero e tem para lados 5 dm. Nessas condições AM = MB é a altura do triângulo equilátero acima referido e dada por

$$AM = \frac{CD\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Como AM = MB, segue-se que AB = 2 AM e então

$$AB = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 2 = 5\sqrt{3} = 8{,}65\ dm$$

21) Calcular a base menor de um trapézio isósceles, cujos ângulos agudos medem 45°, sabendo-se que a base maior tem 19,8 m e os lados não paralelos 7,07 m.



AC = BD = 7,07

O triângulo retângulo AHC é isósceles e portando AH = CH. Então:

$$AC^2 = CH^2 + AH^2 \quad \text{ou} \quad AC^2 = 2\,CH^2 \quad \text{e}$$

$$7{,}07^2 = 2\,CH^2 \quad \text{ou} \quad 49{,}9849 = 2\,CH^2$$

$$CH^2 = \frac{49{,}9849}{2} = 24{,}9924 \quad \text{e}$$

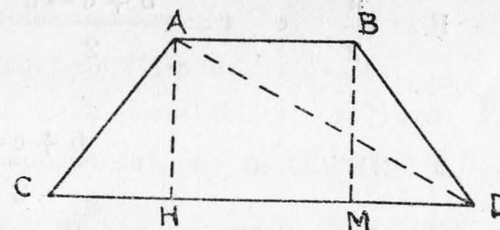
$$CH = \sqrt{24{,}9924} = 5\ m. \text{ (aproximadamente)}$$

Sendo o trapézio isósceles CH = GD e porque AB = HG, segue-se que seu valor será:

$$HG = AB = CD - 2\,CH \quad \text{ou}$$

$$AB = 19{,}8 - 2 \times 5 = 9{,}8\ m.$$

22) Calcular as diagonais de um trapézio isósceles, conhecendo suas bases: 19,8 m e 9,8 m e sabendo que os lados não paralelos valem 7,07 m.



Por se tratar de trapézio isósceles

$$CH = MD \quad \text{Então:} \quad AB = HM = 9{,}8 \quad \text{e}$$

$$CH = MD = \frac{CD - AB}{2} = \frac{19{,}8 - 9{,}8}{2} = 5m.$$

Os triângulos retângulos ACH e BDM são iguais e permitem calcular AH = BM, altura do trapézio, com o auxílio do *teorema 4*.

$$7{,}07^2 = 5^2 + AH^2 \quad \text{ou} \quad AH = 5\,m.$$

O triângulo retângulo AHD, do qual conhecemos $AH = 5\,m$ e $HD = CD - CH = 19{,}8 - 5 = 14{,}8$, permitirá calcularmos AD diagonal do trapézio.

Vejamos:

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 \qquad AD^2 = 5^2 + 14{,}8^2 \qquad \text{ou}$$

$$AD^2 = 25 + 219{,}04 = 244{,}04 \qquad \text{e}$$

$$AD = \sqrt{244{,}04} = 15{,}6\,m$$

23) Um triângulo retângulo está inscrito num círculo de diâmetro 37 m e circunscrito a um círculo de raio 5 m. Calcular os catetos dêsse triângulo e a distância entre os centros dos dois círculos.

Vimos no início do capítulo que:

$$R = \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad r = \frac{b + c - a}{2}$$

Então:

$$a = 2R = 37\,m \quad \text{e} \quad r = \frac{b + c - a}{2} \quad \text{ou}$$

$$5 = \frac{b + c - 37}{2} \quad \text{e} \quad b + c = 47 \quad (1)$$

O teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

completará a segunda equação que irá constituir com a equação (1) o sistema cuja solução dá:

$$b = 35 \quad \text{e} \quad c = 12\,m.$$

Vimos também que:

$$d^2 = R\,(R - 2r) \;\therefore\; d^2 = 18{,}5\,(18{,}5 - 10)$$

$$d^2 = 157{,}25$$

Então:

$$d = \sqrt{157{,}25} = 12{,}5$$

24) O perímetro de um triângulo retângulo é 24 m e o raio do círculo inscrito neste triângulo é 2 m. Calcular os lados do triângulo.

Os dados do problema permitem escrever:

$$a + b + c = 24 \qquad (1)$$

$$r = \frac{bc}{a + b + c} = 2 \qquad (2)$$

O *teorema 4* nos dá:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (3)$$

As equações (1), (2) e (3) formam um sistema que iremos resolver.

A equação (1) pode ser escrita:

$$b + c = 24 - a \qquad (1.^a)$$

A equação (2), face ao valor de $a + b + c$ se reduz a

$$bc = 48 \qquad (2.^a)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (3.^a)$$

Elevando-se a equação (1.ª) ao quadrado vem:

$$\underbrace{b^2 + c^2}_{a^2} + 2\,\underbrace{bc}_{48} = 576 - 48\,a + a^2$$

$$a^2 + 2 \times 48 = 576 - 48\,a + a^2 \quad \text{e}$$

$$48\,a = 480 \quad \text{e} \quad a = 10\,m.$$

Ficamos assim com as equações

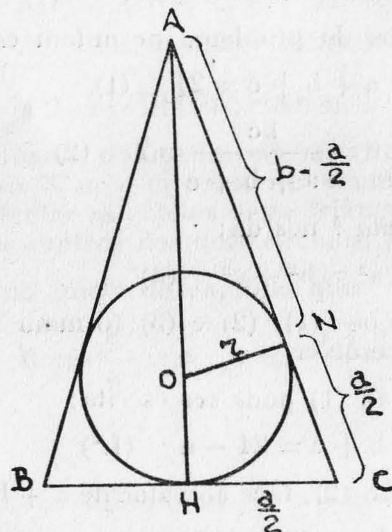
$$b + c = 14 \quad \text{e} \quad bc = 48$$

que tem para raízes

$$b = 8\,m \quad \text{e} \quad c = 6\,m$$

25) Calcular o raio do círculo inscrito num triângulo isósceles cujos lados iguais valem 5 m e o diferente 6 m.

Resolvamos o problema de um modo geral, isto é, calculemos o raio do círculo inscrito ao triângulo isósceles cujos lados iguais valem b e o diferente a.



Os segmentos HC e CN são iguais porque são tangentes a um mesmo círculo, traçadas de um ponto exterior; $CN = CH = \frac{a}{2}$.

$$AN = AC - CN \quad \text{ou} \quad AN = b - \frac{a}{2}$$

AH é a altura do triângulo isósceles e tem para expressão:

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$$

No triângulo retângulo AON,

$$AO = AH - OH \quad \text{ou}$$

$$AO = \left(\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} - r \right)$$

O mesmo triângulo retângulo nos permite escrever, de acôrdo com o *teorema 4*.

$$\left(b - \frac{a}{2} \right)^2 + r^2 = \left(\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} - r \right)^2 \quad \text{ou}$$

$$b^2 - ab + \frac{a^2}{4} + r^2 =$$

$$\frac{4b^2 - a^2}{4} - 2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \times r + r^2$$

$$2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \times r = ab - 2\frac{a^2}{4} \quad \text{ou}$$

$$2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \times r = ab - \frac{a^2}{2} \quad \text{e}$$

$$r = \frac{ab - \frac{a^2}{2}}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2ab - a^2}{\frac{4\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}}$$

$$r = \frac{2ab - a^2}{2\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

que é a expressão procurada.

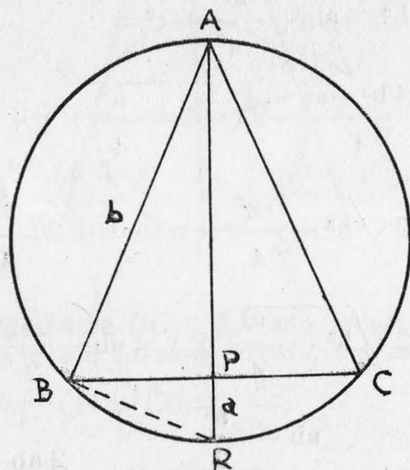
Aplicando-a ao caso do exercício proposto, vem:

$$r = \frac{2 \times 5 \times 6 - 6^2}{2\sqrt{100-36}} = \frac{60-36}{16} =$$

$$= \frac{24}{16} = 1{,}5 \text{ m}.$$

26) Calcular o raio do círculo circunscrito ao triângulo isósceles de lados 5m; 5m e 6m.

Como no exemplo anterior, resolvamos o problema de um modo geral.



Na figura temos:

$$AP \text{ — (altura do triângulo isósceles)} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$BP = \frac{a}{2}$$

No triângulo A B R, retângulo em B, B P é a altura relativa à hipotenusa AR = diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo A B C e como tal

$$BP^2 = AP \times PR \quad \text{ou} \quad BP^2 = h \times PR \quad \text{ou}$$

$$\frac{a^2}{4} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \times PR \quad \text{e}$$

$$PR = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

Mas

$$AR = \text{diâmetro} = PR + AP$$

Então:

$$\frac{a^2}{2\sqrt{4b^2 - a^2}} + \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} = 2R \quad \text{ou}$$

$$\frac{a^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} + \sqrt{4b^2 - a^2} = 4R \quad \text{ou}$$

$$\frac{a^2 + 4b^2 - a^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} = 4R \quad \text{e}$$

$$R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

Posto isto, resolvamos o problema proposto.

$$R = \frac{5^2}{\sqrt{4 \times 5^2 - 6^2}} = \frac{25}{8} = 3{,}125 \text{ m}$$

27) Calcular os catetos de um triângulo retângulo, sendo a hipotenusa igual a 5 m e o raio do circulo inscrito igual a 1 m.

Como vimos:

$$r = \frac{b + c - a}{2}$$

Como a = 5 m, e r = 1; teremos:

$$\frac{b + c - 5}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad b + c = 7 \quad (1)$$

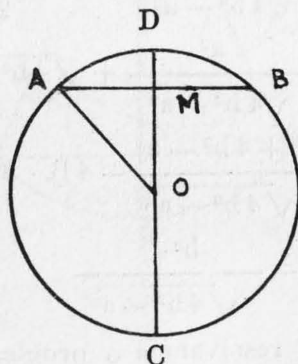
Por outro lado

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{ou} \quad 25 = b^2 + c^2 \quad (2)$$

As equações (1) e (2) formam um sistema que tem para solução:

$$b = 3\,\text{m} \quad \text{e} \quad c = 4\,\text{m}$$

28) Em um circulo de 1,20 m de raio traça-se uma corda de 1 m; calcular a distância dela ao centro do círculo.



A B = 1 m
A M = M B (toda corda perpendicular ao diâmetro fica dividida ao meio pelo diâmetro).
CD — diâmetro perpendicular à corda AB

A O = 1,20 m
Queremos calcular O M.

O triângulo retângulo M A O dá, de acôrdo com o *teorema 4*

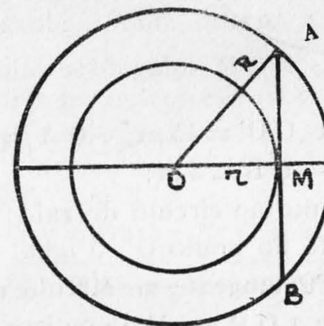
$$A\,O^2 = A\,M^2 + O\,M^2 \quad \text{ou}$$

$$(1{,}20)^2 = (0{,}5)^2 + OM^2 \quad \text{ou}$$

$$O\,M^2 = 1{,}44 - 0{,}25 = 1{,}19\ \text{m}^2$$

$$O\,M = \sqrt{1{,}19} = 1{,}09\ \text{m}.$$

29) Os raios de dois círculos concêntricos são 6 dm e 8 dm. Calcular o valor da corda do círculo maior, tangente ao menor.



Na figura o triângulo M O A é retângulo (A tangente A M é perpendicular ao raio O M no ponto de tangência M).

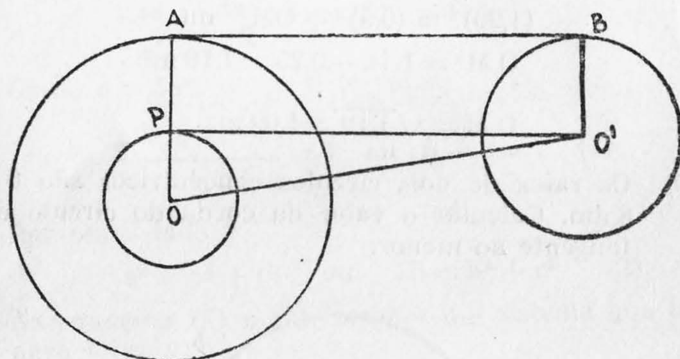
A relação 4 nos dá:

$$R^2 = r^2 + A\,M^2 \quad \text{e} \quad A\,M^2 = 64 - 36 = 28 \quad \text{e}$$

$$A\,M = 5{,}29\ \text{m}.$$

$$A\,B = 2\,A\,M = 2 \times 5{,}29 = 10{,}58\ \text{m}$$

30) Os raios de duas circunferências exteriores são iguais a 8 m e 3 m respectivamente. A distância de seus centros é de 15 m. Calcular o comprimento da tangente comum externa aos dois círculos.



Na figura $OO' = 15$ m; $OA = 8$ m; $O'B = 3$ m; $OP = OA - O'B = 5$ m.
O'P, tangente ao círculo de raio
OP, traçada no ponto O'; é igual a AB.
Por ser O'P tangente ao círculo de raio OP é perpendicular a OP em P e por isso o triângulo OPO' é retângulo em P e dêle conhecemos:

$$OO' = 15 \text{ m} \quad \text{e} \quad OP = 5 \text{ m}$$

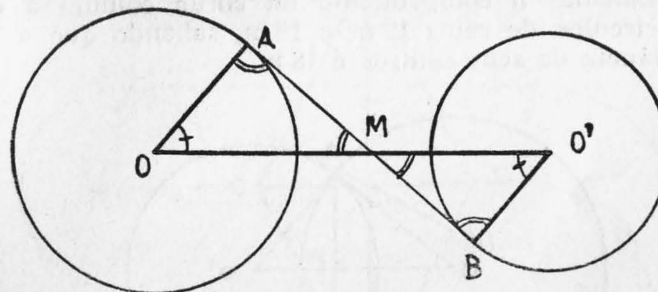
Então:

$$O'P^2 = OO'^2 - OP^2$$

e depois das substituições:

$$O'P = AB = 14{,}142 \text{ m}.$$

31) **Os raios de duas circunferências são 4 cm e 8 cm e a distância dos centros 15 cm. Calcular o segmento da tangente comum interna.**



Na figura: $OO' = 15$ cm; $OA = 8$ cm e $O'B = 4$ cm.
AB — tangente comum interna a determinar.

Os triângulos retângulos MOA e MO'B são semelhantes e nos permitem escrever:

$$\frac{OA}{O'B} = \frac{OM}{O'M} \quad \text{e} \quad OM + O'M = 15 \quad \text{ou}$$

$$\frac{OA + O'B}{OA} = \frac{OM + O'M}{OM} \quad \text{ou}$$

$$\frac{8 + 4}{8} = \frac{15}{OM} \quad \text{e} \quad OM = \frac{8 \times 15}{12} = 10 \text{ cm}$$

Consequentemente:

$$O'M = 15 - 10 = 5 \text{ cm}$$

Os triângulos retângulos acima mencionados dão também:

$$AM^2 = OM^2 - OA^2 = 100 - 64 = 36 \quad \text{e}$$

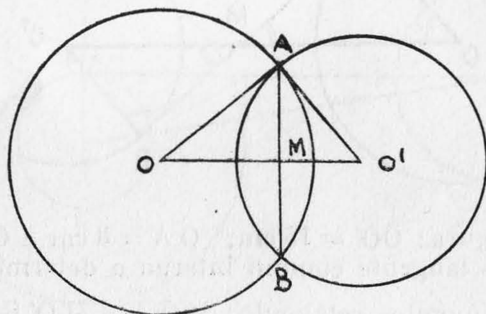
$$AM = 6 \text{ cm}.$$

$$MB^2 = O'M^2 - O'B^2 = 25 - 16 = 9 \quad \text{e}$$

$MB = 3$

$AB = 6\text{ cm} + 3\text{ cm} = 9\text{ cm}.$

32) Calcular o comprimento da corda comum à dois círculos de raios 12 m e 15 m, sabendo que a distância de seus centros é 18 m.



Sabemos que $AB = 2AM$.
Os triângulos retângulos AMO e AMO' dão, respectivamente:

$$AM^2 = AO^2 - OM^2$$
$$AM^2 = AO'^2 - O'M^2$$

Se considerarmos que $O'M = 12 - OM$, vem:

$$AM^2 = AO^2 - OM^2 \quad \text{e}$$
$$AM^2 = AO'^2 - (12 - OM)^2$$

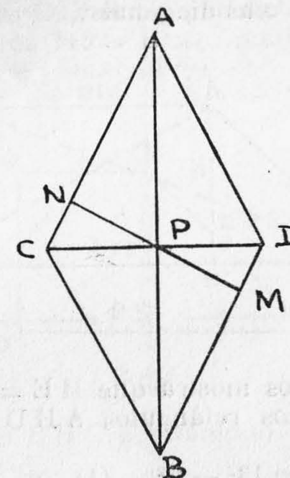
As duas equações formam um sistema que resolvido dará o valor de OM e AM e que são:

$$OM = 11{,}25\text{ m} \quad \text{e} \quad AM = 9{,}92\text{ m}$$

Como:

$$AB = 2AM \quad \text{teremos}$$
$$AB = 2 \times 9{,}92 = 19{,}84\text{ m}$$

33) Calcular a altura de um losango, cujas diagonais medem 12 m e 16 m.



Chama-se altura do losango, como vimos, a distância entre dois lados opostos; na figura a reta MN.

Os triângulos APC e DPB são retângulos e as retas PN e PM são suas respectivas alturas, relativas às hipotenusas AC e BD. Como os ditos triângulos são iguais, suas alturas PN e PM também são.

Calculemos uma delas e multipliquemos por dois, seu resultado. Teremos inicialmente que calcular o lado do losango. Temos:

$$AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \quad \text{e} \quad AC = 10$$

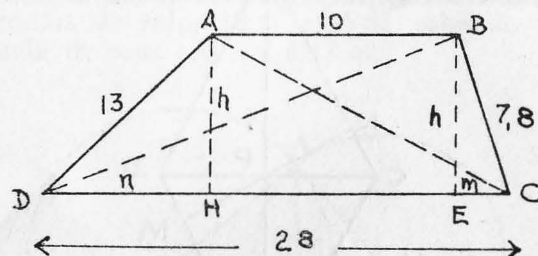
A seguir, sabemos que

$$AC \times PN = PC \times AP \quad \text{ou}$$

$$10 \times PN = 6 \times 8 \text{ e } PN = \frac{48}{10} = 4{,}8\text{ m}$$

$$NM = 2PN = 2 \times 4{,}8 = 9{,}6\text{ m}.$$

39) As bases de um trapézio medem 10 m e 28 m e os lados não paralelos 7,8 m e 13 m. Calcular a altura do trapézio e as diagonais.



A figura nos mostra que H E = A B = 10.
Os triângulos retângulos A H D e B E C, dão:

$$h^2 = 13^2 - n^2 \quad (1) \quad e \quad h^2 = 7{,}8^2 - m^2 \quad (2)$$

Por outro lado

$$m + n = 28 - 10 = 18 \quad (3)$$

As equações (1), (2) e (3) formam um sistema que resolvido dá:

$$n = 12 \quad e \quad m = 6$$

Com os valôres de n = 12 ou m = 6 nas equações (1) ou (2) teremos:

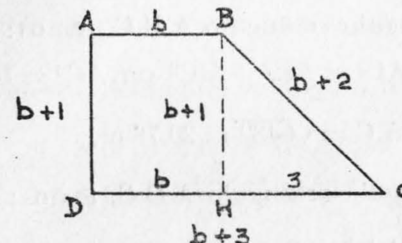
$$h^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

$$h = 5$$

Os triângulos A H C e B E D são retângulos e o cálculo de suas hipotenusas responde às perguntas:

$$A\,C = 17{,}7\,m \quad e \quad B\,D = 22{,}5\,m.$$

35) O menor dos lados de um trapézio retângulo é a base menor. Calcule o perímetro do trapézio, sabendo que os lados desse quadrilátero são números inteiros e consecutivos.
I.E. — 1955



O triângulo B H C é retângulo e o teorema de Pitágoras nos dá:

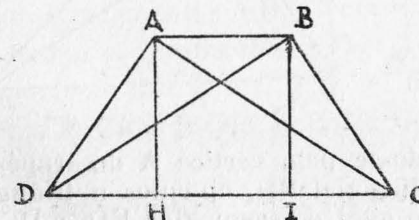
$$(b + 2)^2 = (b + 1)^2 + 3^2 \quad ou$$

$$b^2 + 4\,b + 4 = b^2 + 2\,b + 1 + 9 \quad ou$$

$$2\,b = 6 \quad e \quad b = 3$$

Depois disso concluimos que os lados do trapézio são: 3, 4, 5 e 6 e o perímetro é 18.

36) Calcular os lados não paralelos e as diagonais de um trapézio isósceles, sabendo que as diagonais são perpendiculares aos lados não paralelos e que as bases medem 12 m e 24 m.



$A B = H I = 12$ m.
$D H = C I = (24 - 12) \div 2 = 6$ m

No triângulo retângulo A D C temos:

$$A H^2 = D H \times H C \quad \text{ou} \quad A H^2 = 6 \times 18 = 108$$

No triângulo retângulo A H C temos:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \quad \text{ou} \quad AC^2 = 108 + 18^2 = 432$$

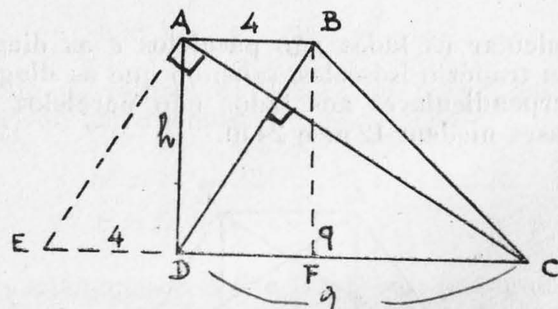
$$A C = \sqrt{432} = 20{,}78 \text{ m.}$$

No triângulo retângulo A D C, temos:

$$A D^2 = D C^2 - A C^2 \quad \text{ou}$$
$$A D^2 = 24^2 - 432 = 576 - 432 = 144$$

$$A D = \sqrt{144} = 12 \text{ m.}$$

37) Na figura que se segue, $A B = 4$ m; $D C = 9$ m. As diagonais A C e B D são, perpendiculares. Calcular a altura do trapézio (h); suas diagonais AC e B D e o lado B C.



Traçando-se pelo vértice A do trapézio a paralela AE, à diagonal BD, obtemos o triângulo retângulo AEC, no qual os segmentos ED e DC são da hipotenusa EC, e determinados pela altura AD do triângulo e também do trapézio.

Então podemos escrever:

$$A D^2 = E D \times D C \quad \text{ou}$$

$$A D^2 = 4 \times 9 = 36 \quad \text{e} \quad A D = 6 \text{ m.}$$

No mesmo triângulo retângulo têmos:

$$A C^2 = A D^2 + D C^2 \quad \text{ou}$$

$$A C^2 = 36 + 81 = 117 \text{ m}^2 \quad \text{e}$$

$$A C = \sqrt{117} = 10{,}81 \text{ m}$$

Temos ainda:

$$D B^2 = 36 + 16 = 52 \text{ m}^2 \quad \text{e}$$

$$DB = \sqrt{52} = 7{,}21 \text{ m}$$

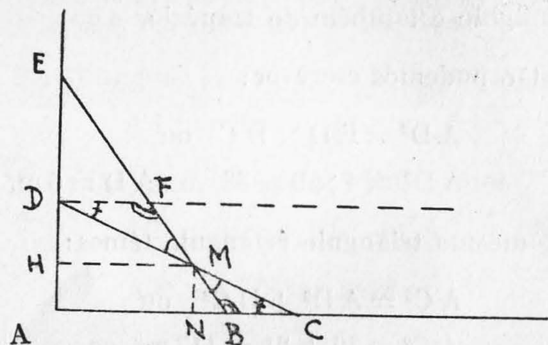
Finalmente:

$$B C^2 = 36 + 25 = 61 \text{ m}^2 \quad \text{e}$$

$$B C = \sqrt{61} = 7{,}81 \text{ m.}$$

38) De um ponto A traçam-se duas semi-retas perpendiculares entre si, como na figura. Sôbre uma tomam-se segmentos $A B = 3$ cm e $A C = 5$ cm e sôbre a outra os segmentos $A D = 2$ cm e $A E = 6$ cm. Ligando-se B a E e C a D calcule as distâncias do ponto M (intersecção de B E e C D) a cada uma das semi-retas.

C. Naval — 1960



As linhas cheias são as do problema propôsto. As tracejadas e os ângulos assinalados são da solução do problema.

O problema diz que $AE = 6$ cm e $AD = 2$ cm. Então $ED = AE - AD = 6 - 2 = 4$ cm. Por outro lado, sendo $AC = 5$ cm e $AB = 3$ cm, segue-se que $BC = AC - AB = 5 - 3 = 2$ cm.

Os triângulos E A B e E D F são semelhantes (teorema de Tales) e nos permitem escrever:

$$\frac{DF}{AB} = \frac{EF}{EB} = \frac{ED}{EA} \quad (1) \text{ ou}$$

$$\frac{DF}{3} = \frac{EF}{EB} = \frac{4}{6}$$

Sendo o triângulo E A B retângulo temos:

$$EB^2 = EA^2 + AB^2 \text{ ou}$$

$$EB^2 = 36 + 9 = 45 \text{ e}$$

$$EB = \sqrt{45} = 6{,}71 \text{ cm.}$$

A relação (1) pode então ser escrita:

$$\frac{DF}{3} = \frac{EF}{6{,}7} = \frac{4}{6} \quad \text{e então}$$

$$DF = 2 \text{ cm} \quad \text{e} \quad EF = 4{,}47 \text{ cm.}$$

Nessas condições

$$FB = EB - EF = 6{,}71 - 4{,}47 = 2{,}24 \text{ cm}$$

Os triângulos MDF e MBC que são semelhantes (dois ângulos iguais M (comum) e D = C (alternos internos) nos permitem escrever:

$$\frac{DF}{BC} = \frac{FM}{MB} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{2} = \frac{FM}{MB} \quad (2)$$

Em face da relação 2, concluimos que $FM = MB$, isto é, que o ponto M fica no meio de F B e portanto:

$$FM = MB = \frac{2{,}24}{2} = 1{,}12 \text{ cm.}$$

Nessas condições:

$$EM = EF + FM \quad \text{ou}$$

$$EM = 4{,}47 + 1{,}12 = 5{,}59 = 5{,}6 \text{ cm.}$$

(aproximadamente)

Os triângulos EMH e EAB são semelhantes (teorema de Tales) e nos permitem escrever:

$$\frac{EH}{EA} = \frac{MH}{AB} = \frac{EM}{EB} \quad \text{ou}$$

$$\frac{EH}{6} = \frac{MH}{3} = \frac{5{,}6}{6{,}71} \quad \text{e}$$

$$MH = \frac{5{,}6 \times 3}{6{,}71} = 2{,}5 \text{ cm} \quad \text{e}$$

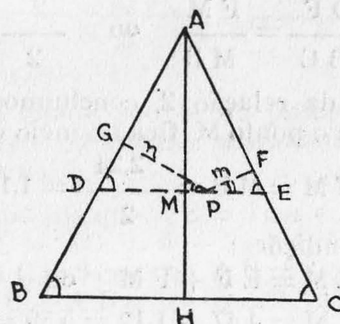
$$EH = \frac{5{,}6 \times 6}{6{,}71} = 4{,}7 \text{ cm.}$$

O problema pede MH e MN = AH (paralelas compreendidas entre paralelas), e como:

$$AH = MN = EA - EH, \text{ teremos:}$$

$$MN = 6 - 4{,}7 = 1{,}5 \text{ cm}$$

39) Num triângulo isósceles cujos lados são 18, 18 e 24 metros há um ponto M que dista 7 m da base. Sabe-se que as distâncias dêsse ponto aos lados iguais estão na razão de $^1/_2$. Calcule essas distâncias.



Na figura os ângulos: $B = C = D = E$
B e D correspondentes
C e E correspondentes
B e C ângulos da base do triângulo isósceles
O problema diz que

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n = 2m$$

Então: $PF = m$ e $PG = 2m$ ou $PG = 2PF$

Sendo os triângulos retângulos PGD e PFE semelhantes (2 ângulos iguais $D = E$ e $G = F = 90°$), a razão de semelhança é $^1/_2$ e então:

$$2PE = PD$$

Por outro lado os triângulos ABC e ADE são semelhantes (teorema de Tales) e então:

$$\frac{AM}{AH} = \frac{DE}{BC}$$

Mas

$$AM = AH - MH \quad \text{ou} \quad AM = AH - 7$$

Como:

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \quad \text{ou} \quad AH^2 = 18^2 - 12^2 =$$

$$= AH^2 = 324 - 144 = 180 \text{ m}^2$$

$$AH = \sqrt{180} = 13{,}4 \text{ m.}$$

$$AM = 13{,}4 - 7 = 6{,}4 \text{ m.}$$

Então:

$$\frac{6{,}4}{13{,}4} = \frac{DE}{24} \quad \text{e} \quad DE = \frac{6{,}4 \times 24}{13{,}4} \quad \text{como}$$

$$DE = DP + PE \text{ e como } DP = 2PE$$

Segue-se que:

$$DE = 2PE + PE = 3PE$$

Então:

$$\frac{6{,}4 \times 24}{13{,}4} = 3PE \quad \text{e}$$

$$PE = \frac{6{,}4 \times 24}{13{,}4 \times 3} = \frac{51{,}2}{13{,}4} = 3{,}82$$

Então:

$$DP = DE - PE = 11{,}46 - 3{,}82 = 7{,}64 \text{ m}$$

Como os triângulos P G D e A H D **são semelhantes** (retângulos e um ângulo igual — 3 ângulos iguais), nos permite escrever:

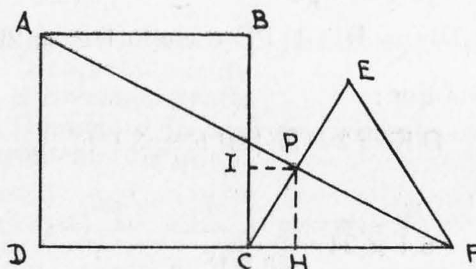
$$\frac{PD}{AB} = \frac{PG}{AH} \text{ ou } \frac{PD}{18} = \frac{PG}{13{,}4} \text{ e como}$$

$$\frac{7{,}64}{18} = \frac{PG}{13{,}4} \text{ ou } PG = \frac{7{,}64 \times 13{,}4}{18} = 5{,}687$$

Mas vimos que:

$$PG = 2PF \text{ e } PF = \frac{PG}{2} = \frac{5{,}687}{2} = 2{,}843 \text{ m}$$

40) Na figura abaixo, calcular as distâncias do ponto de interseção da reta A F com o lado E C do triângulo equilátero E C F, ao lado B C do quadrado A B C D e ao lado CF do triângulo equilátero referido. Os lados do quadrado e do triângulo medem 10 m.



Por ser equilátero o triângulo E C F, seus ângulos valem 60°. O triângulo P C H é retângulo em H e tem um ângulo agudo de 60°; então:

$$PH = \frac{PC\sqrt{3}}{2} \text{ e } CH = \frac{PC}{2}$$

Por outro lado os triângulos A D F e P H F **são semelhantes e dão:**

$$\frac{AD}{PH} = \frac{DF}{FH} \quad \text{(a)}$$

Como:

$$FH = CF - CH \text{ ou } FH = 10 - \frac{PC}{2}$$

Substituindo os valôres conhecidos em (a), vem:

$$\frac{10}{\frac{PC\sqrt{3}}{2}} = \frac{20}{10 - \frac{PC}{2}} \text{ ou}$$

$$\frac{20}{PC\sqrt{3}} = \frac{40}{20 - PC} \text{ ou}$$

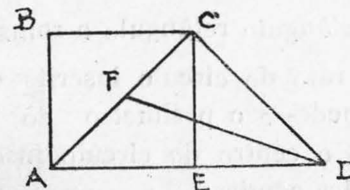
$$4{,}46\,PC = 20 \text{ e } PC = \frac{20}{4{,}46} = 4{,}48 \text{ m}$$

Então:

$$PH = \frac{4{,}48\sqrt{3}}{2} = 3{,}8752 \text{ m e}$$

$$CH = IP = \frac{PC}{2} = \frac{4{,}48 \text{ m}}{2} = 2{,}24 \text{ m}$$

41) **Em um trapézio retângulo A B C D os ângulos A e B são retos. Os lados valem A B = 4 m e A D = 3 m e B C = 2 m. Pede-se o comprimento da reta que partindo de D, passa pelo meio da diagonal A C.**



O triângulo E C D é retângulo e dá:

$$CD^2 = CE^2 + ED^2 \quad \text{ou}$$

$$CD^2 = 16 + 1 \quad \text{e} \quad CD^2 = 17$$

$$CD = \sqrt{17}$$

O triângulo A B C é retângulo e dá:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{ou} \quad AC^2 = 16 + 4 \quad \text{e}$$

$$AC = \sqrt{20}$$

No triângulo A C D, a reta D F é a mediana relativa ao lado AC, pelo enunciado do problema.

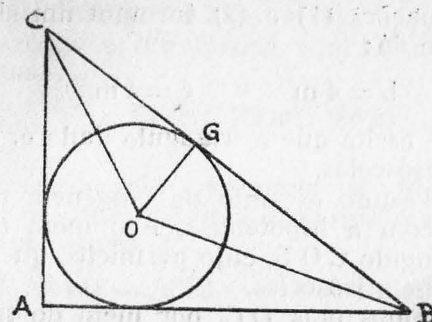
Então:

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \quad \text{ou}$$

$$m_a = \sqrt{\frac{17 + 9}{2} - \frac{20}{4}} =$$

$$= \sqrt{13 - 5} = 2\sqrt{2}$$

42) **Em um triângulo retângulo a soma dos catetos vale 8 m, e o raio do círculo inscrito vale 2 $(2 - \sqrt{2})$ metros; pede-se o perímetro do triângulo obtido unindo-se o centro do círculo inscrito aos vértices dos ângulos agudos.**



Sabemos que:

$$2p = a + b + c \quad \text{e} \quad 2p = a + 8$$

$$p = \frac{a + 8}{2}$$

Por outro lado:

$$r = p - a \quad \text{ou}$$

$$2(2 - \sqrt{2}) = \frac{a + 8}{2} - a$$

$$8 - 4\sqrt{2} = a + 8 - 2a \quad \text{ou}$$

$$+ 4\sqrt{2} = a \quad \text{ou} \quad a = 5{,}64\,\text{m}$$

Sabemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (1)$$

o problema dá:

$$b + c = 8 \quad (2)$$

As equações (1) e (2) formam um sistema que resolvido dá:

$$b = 4\,m \quad e \quad c = 4\,m$$

Vemos assim que o triângulo dado é, além de retângulo, isósceles.
Assim sendo o ponto de tangência do círculo inscrito com a hipotenusa, é o meio da hipotenusa.
O triângulo C O B, cujo perímetro queremos calcular é também isósceles.
Calculemos pois O C, por meio do triângulo retângulo O C G. Temos:

$$O\,C^2 = C\,G^2 + O\,G^2 \text{ ou } O\,C^2 = 8 + 1{,}3924 \text{ ou}$$
$$OC^2 = 9{,}3924 \quad e \quad OC = 3{,}06\,m$$

Por serem iguais O C e O B, o perímetro do triângulo será:

$$2\,p = 2 \times 3{,}06 + 5{,}64 = 11{,}76\,m$$

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) Calcular os catetos; a hipotenusa e a altura de um triângulo retângulo sabendo-se que as suas projeções sôbre a hipotenusa são: 5,1 cm e 6,8 cm.

RESP.: 8,9 cm; 7,7 cm; 11,9 cm e 5,8 cm.

2) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 24 m e um dos segmentos determinadas pela altura sôbre a hipotenusa mede 14 m. Calcular a altura e os catetos.

RESP.: 11,7 m; 18,3 m e 15,4 m

3) Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 10 m. Calcular o menor dos catetos, sabendo que um dos segmentos determinado pela altura sôbre a hipoteusa mede 6,4 m.

C. Naval — 1951 RESP.: 6 m

4) Os catetos de um triângulo retângulo medem 16 m e 12 m. Calcular a hipotenusa, as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa e a altura relativa a hipotenusa.

RESP.: 20 m; 9,6 m; 12,8 m e 7,2 m

5) Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 40 m e a altura relativa à mesma mede 19,6 m. Calcular os catetos.

C. Naval — 1959 RESP.: 24 m e 32 m

6) Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo em que um dos catetos mede 5 m e a altura relativa à hipotenusa 3 m.

I.E. — 1952 RESP.: a = 6,25 m

7) Num triângulo retângulo a hipotenusa tem 17 m e a diferença dos catetos é de 7 m. Calcular os catetos.

RESP.: 8 m e 15 m

8) A razão dos dois catetos de um triângulo retângulo é $^3/_4$. Calcular a hipotenusa e os catetos cuja soma é 14.

RESP.: 6 m, 8 m e 10 m

9) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede $\sqrt{10}$ metros e um dos catetos é o triplo do outro. Calcular valôr do cateto maior.

C. Naval — 1951 RESP.: 3 m

10) Os catetos de um triângulo retângulo medem 15 cm e 20 cm. Qual o maior segmento que a altura relativa à hipotenusa determina sôbre a mesma? ..

C. Naval — 1957 RESP.: 16 cm

11) O cateto que se opõe a um ângulo de 30° de um triângulo retângulo mede 20 cm. Qual o comprimento da mediana relativa à hipotenusa?

C. Naval — 1957 RESP.: 20 cm

12) A razão dos catetos de um triângulo retângulo é $^5/_{12}$. Calcular a hipotenusa e os dois catetos cuja soma é 34 m.

RESP.: 26 m; 10 m e 24 m

13) A soma dos catetos de um triângulo retângulo vale 7 m e a hipotenusa 5 m. Calcular os catetos.

RESP.: $b = 3$ m; $c = 4$ m

14) A soma dos três lados de um triângulo retângulo é 60 m; a diferença entre os catetos é 5 m. Calcular os lados do triângulo.

RESP.: 15 m; 20 m; 25 m

15) Achar um triângulo retângulo cujos lados sejam três números inteiros e consecutivos.

RESP.: 3; 4; e 5

16) A hipotenusa de um triângulo retângulo excede os catetos de 3 cm e 6 cm. Quais são os três lados do triângulo?

RESP.: 15 cm; 12 cm e 9 cm

17) Em um triângulo retângulo o perímetro é 36 m e um cateto é média aritmética entre a hipotenusa e o outro cateto; pede-se a projeção da mediana que cai sôbre a hipotenusa e o raio do círculo inscrito.

RESP.: 2,1 m e 3 m

18) Em um triângulo retângulo as diferenças entre a hipotenusa e os catetos são respectivamente 2 m e 4 m. Calcular os lados do triângulo.

RESP.: 10 m; 8 m e 6 m

ok *

— 19) Calcular os lados de um triângulo retângulo cujo perímetro tem 60 m e a altura relativa à hipotenusa 9,2 m.

120/13

RESP.: 26 m; 10 m e 24 m

20) Calcular os três lados de um triângulo retângulo cuja soma é 60 m e cuja soma dos seus quadrados é 1250 m².

RESP.: 25 m; 20 m e 15 m

*

21) Em um triângulo retângulo que tem, um ângulo agudo de 30°, a hipotenusa vale 40 m. Achar os catetos do triângulo.

RESP.: 20 m e 34,60 m

22) Em um triângulo ABC, retângulo em A, BC = 25 cm e AB = 24 cm. Calcular a bissetriz interna do ângulo C.

C. Naval — 1958 RESP.: 8,75 cm

ok *

— 23) A altura de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa mede 11,5 dm e as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa diferem de 42 dm. Calcular os lados dêsse triângulo.

11,625

RESP.: 48 dm; 46,5 dm e 12 dm

24) Num triângulo retângulo isósceles a altura que cai sôbre a hipotenusa vale 2,5 m. Calcular os lados do triângulo.

RESP.: $a = 5$ m; $b = c = 3,5$ m

25) Os catetos de um triângulo retângulo medem 15 m e 20 m. Sôbre a hipotenusa, a uma distância de 12 m de um dos vértices, marca-se um ponto. Calcular a distância dêsse ponto ao vértice do ângulo reto.

RESP.: 12,36 m

26) O triângulo A B C é retângulo e o ângulo B é o dôbro do ângulo C. Sabendo-se que a altura relativa à hipotenusa mede $4\sqrt{3}$ metros, pede-se calcular o perímetro do triângulo.

RESP.: 37,84 m

27) ABC é um triângulo retângulo no qual A = 30° e A C = 8 m. Calcular as alturas dêsse triângulo relativos ao lado A B e A C.

RESP.: $4\sqrt{3}$ e 4 m

28) Num triângulo retângulo que tem um ângulo de 30°, achar a razão entre os segmentos que a bissetriz do outro ângulo agudo determina sôbre o cateto oposto.

RESP.: 2

29) No triângulo retângulo ABC, a hipotenusa B C = 6 m e o cateto A C = 3 m. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos agudos dêsse triângulo.

RESP.: 135°

30) No triângulo retângulo B A C o ângulo B vale 60° e a hipotenusa BC = 10 cm. Traça-se em C a tangente ao círculo circunscrito ao triângulo B A C. Seja D o ponto de encontro dessa tangente com o prolongamento de B A. Depois de você calcular o ângulo D, determine o valôr de A D.

E.P.C.Ar — 1963 RESP.: 30° e 15 cm

31) Na figura, *a* é a hipotenusa, *b* e *c* os catetos; *h* é a altura em relação a *a* e h_1, perpendicular a *c*. Exprimir h_1 em função de *a*, *b* e *c*.

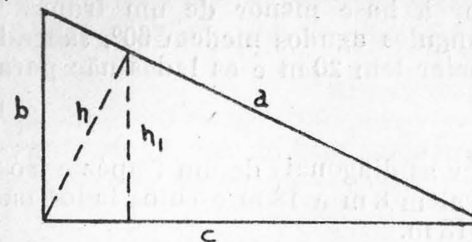


FIG. 1

C. Naval — 1953 RESP.: $h_1 = \dfrac{b\,c^2}{a^2}$

32) Calcular a altura de um triângulo equilátero, cujo lado tem 20 dm.

RESP.: 17,3 dm

33) O lado de um triângulo equilátero excede a altura de 1,62 m. Calcular o lado.

RESP.: 12 m.

34) O perímetro de um quadrado tem 16 dm. Calcular sua diagonal.

RESP.: 5,64 dm

35) A soma da diagonal e do lado de um quadrado é 9,64 dm; calcular o lado do quadrado.

RESP.: 4 dm

36) Em um losango o ângulo agudo é igual à metade do ângulo obtuso. O lado do losango sendo 6 dm, calcular as suas diagonais.

RESP.: 6 dm e 10,38 dm

37) Calcular a base menor de um trapézio isósceles, cujos ângulos agudos medem 60°, sabendo-se que a base maior tem 20 m e os lados não paralelos 12 m.

RESP.: 8 m

38) Calcular as diagonais de um trapézio isósceles cujas bases valem 8 m e 18 m e cujos lados não paralelos valem 13 m.

RESP.: 17,6 m

39) Um triângulo retângulo está inscrito num círculo de diâmetro 10 m e circunscrito a um círculo de 2 m. Calcular os catetos dêsse triângulo.

RESP.: 6 m e 8 m

40) O perímetro de um triângulo retângulo é 84 m e o raio do círculo inscrito nêste triângulo é 5 m. Calcular os lados do triângulo.

RESP.: 37 m; 35 m e 12 m

41) Inscreve-se um círculo num triângulo isósceles de 3 m de base e 3,6 m de altura. Calcular o raio do círculo.

RESP.: 1 m

42) Calcular o raio do círculo inscrito num triângulo isósceles cujos lados iguais medem 7 m e o diferente 11,2 m.

RESP.: 1,86

43) Num triângulo isósceles de base igual a altura de 6 m, calcular o raio do círculo circunscrito.

RESP.: 3,75 m

44) Calcular a distância entre os centros dos círculos inscritos e circunscritos ao triângulo isósceles de lados 5 m; 5 m e 6 m.

RESP.: 0,39 m

45) Calcular os catetos de um triângulo retângulo, sendo a hipotenusa 37 m e o raio do círculo inscrito igual a 5 m.

RESP.: 35 m e 12 m

46) Em um círculo de 5 m de raio traça-se uma corda de 6 m. Calcular a distância dela ao centro do círculo.

RESP.: 4 m

47) Os lados de um triângulo isósceles são AB = = AC = 9 cm e BC = 12 cm. Por um ponto D do lado AB, traça-se a paralela DE ao lado BC. Calcular os lados do trapézio BDEC, sabendo que êle é circunscritível a um círculo.

RESP.: 7,2 cm e 2,4 cm

48) Dois círculos são concêntricos; seus raios são iguais a 7 m e 5 m. Calcular a corda do círculo maior, tangente ao menor.

RESP.: 9,78 m

49) A distância entre os centros de dois círculos é de 17 m. Calcular o comprimento da tangente comum externa, sendo os raios 1 m e 3 m.

RESP.: 16,8 m

50) Os raios de dois círculos medem respectivamente 10 m e 6 m e a distância dos centros 32 m. Calcular o comprimento da tangente comum interna.

RESP.: 27,71 m

51) Calcular a distância entre os centros *O* e *O'* de dois círculos exteriores, cujos raios medem, respectivamente, 6 m e 3 m e cujo segmento da tangente comum aos dois círculos, que não encontram o segmento OO', mede 12 m.

C. Naval — 1958 RESP.: 12,36

52) Demonstrar que o segmento determinado pelos pontos de contato da tangente comum a dois círculos tangentes exteriormente é a média geométrica dos diâmetros dêsses círculos.

E.N.C. Dutra — 1951

53) Num trapézio retângulo a altura mede 8 m e as bases medem, respectivamente, 5 m e 11 m. Calcule o perímetro do trapézio.

I.E. — 1953 **Resp.:** 34 m

54) Sôbre os lados de um quadrado ABCD, em seu exterior, constroem-se triângulos equiláteros. Ligando os vértices dêsses triângulos, opostos aos lados do quadrado forma-se um nôvo quadrado EFGH. Sabendo que o lado do quadrado A B C D mede 1 m, calcular o lado do quadrado EFGH.

I.E. — 1953 **Resp.:** 1,92 m

55) Calcule o perímetro de um losango cujas diagonais têm 48 m e 96 m.

C. Naval — 1952 **Resp.:** 214,4 m

56) A distância entre os centros de dois círculos secantes é 7 m. Os raios dos círculos valem 4 m e 5 m. Calcular o comprimento da corda comum.

Resp.: 5,6 m

57) Calcular a altura de um losango cujas diagonais medem 8 m e 6 m.

Resp.: 4,8 m

58) As bases de um trapézio são 6 m e 15 m e os lados não paralelos 5 m e 7,2 m. Calcular a altura do trapézio.

Resp.: 3,9 m

59) Calcular as medianas de um triângulo retângulo que tem para soma dos catetos 21 m, e a relação entre êles é $^3/_4$.

Resp.: 7,5 m; 10,8 m e 12,86 m

60) No trapézio ABCD a base média tem 20 m e o segmento da base média compreendido entre as diagonais, 4 m. Sabendo-se que os ângulos A e B da base medem 60°, calcular:

a) as bases A B e C D do trapézio.

b) os catetos A H e C H' dos triângulos D H A e C H' B formados quando se traçam as alturas D H e C H'.

c) o perímetro do trapézio.

Resp.: a) 24 m; 16 m
b) 4 m; 6,92 m
c) 56 m

61) A diferença entre as bases de um trapézio A B C D é de 8 m e sua base média tem 15 m. Sabendo-se que os ângulos C e D da base menor medem 150°, calcular:

a) a altura do trapézio

b) os lados não paralelos

Resp.: a) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ m
b) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

repetições de 39/174

3,5

* 62) Os lados de um trapézio retângulo são 5, 8, 5 e 9. Quanto vale o segmento que une os meios dos lados iguais?

E.N.C. Dutra — 1951 RESP.: 4,7

* 63) Em um trapézio isósceles os lados não paralelos medem 10m cada um e um dos ângulos internos 60°. Calcule a distância entre os pontos médios das diagonais.

C. Naval — 1958 RESP.: 5 m

64) Sabendo-se que dois lados de um triângulo isósceles medem 41 m e 18 m. Calcule a altura relativa à base.

I.E. — 1955 RESP.: 40 m

65) Num retângulo a perpendicular traçada de um vértice a uma das diagonais, divide essa diagonal em dois segmentos de 36 cm e 64 cm. Calcule o perímetro do retângulo.

ok

E.N.C. Dutra — 1955 RESP.: 280 cm.

*

66) Calcular os lados não paralelos e as diagonais de um trapézio isósceles, sabendo que as diagonais são perpendiculares aos lados não paralelos e que as bases medem 3 m e 6 m.

RESP.: 3 m e 5,19 m

67 Os catetos de um triângulo retângulo medem 18 m e 24 m. Calcule o maior dos segmentos determinados sôbre a hipotenusa pela bissetriz do ângulo reto.

I.E. — 1951 RESP.: 12,9 m e 17,1 m

68) Em um triângulo A B C, retângulo em A, B C = 25 cm e A B = 24 cm. Calcule a bissetriz interna do ângulo C.

C. Naval — 1958 RESP.: 8,75 cm

69) Um dos catetos de um triângulo retângulo vale os $^3/_4$ do outro. Calcule o perímetro do triângulo semelhante cuja hipotenusa mede 40 m.

E.N.C. Dutra — 1955 RESP.: 96 m

70) Em um triângulo retângulo os catetos medem 21 cm e 28 cm Traçam-se as bissetrizes interna e externa relativas à hipotenusa. Calcular a distância entre os pés dessas bissetrizes.

C. Naval — 1953 RESP.: 155 cm

71) Os catetos de um triângulo retângulo medm 6 m e 8 m. Traçando-se de um ponto sôbre a hipotenusa as paralelas aos catetos, forma-se um retângulo de 14 m de perímetro. Calcule os dois lados desse retângulo.

RESP.: 3 m e 4 m

72) A base e a altura de um retângulo são proporcionais a 12 e a 5. Calcule a base, sabendo que a diagonal mede 26 cm.

ok

C. Naval — 1957 RESP.: a = 24 e b = 10

* 73) Numa circunferência de 10 cm de raio traçam-se das extremidades do diâmetro duas cordas iguais a 16 cm cada uma. Calcular a distância do ponto de encontro das cordas ao diâmetro.

RESP.: 7,50 cm

ok *

74) Demonstre que a mediana de um triângulo retângulo é igual à metade da hipotenusa.

C. Naval — 1955

. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Tábuas naturais

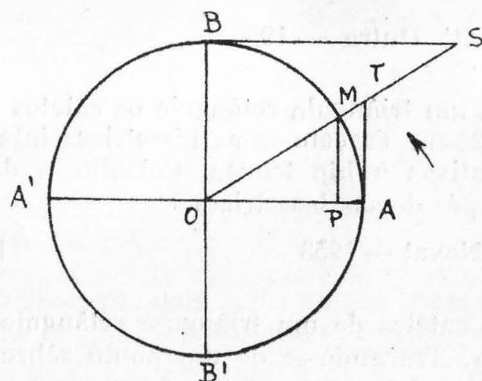


FIG. 2

Dado um ângulo A O M, descreve-se, do seu vértice como centro, uma circunferência, sôbre a qual êle intercepta um arco ÂM. Sejam A a origem do arco AM e M o seu extremo. Tracemos O M e os diâmetros retangulares A A' e B B'.

Chama-se *seno* de um arco a relação ao raio dêste arco, da perpendicular baixada da extremidade do arco sôbre o diâmetro que passa pela origem.

Assim, o *seno* do arco A M ou do ângulo A O M é a relação $\frac{MP}{OA}$

Chama-se *coseno* de um arco a relação ao raio deste arco, da projeção do raio O M que passa pela extremidade, sôbre o diâmetro que passa pela origem.

Assim, o coseno do arco A M ou do ângulo A O M é $\frac{OP}{OM}$

Chama-se *tangente* de um arco a relação ao raio dêsse arco, da perpendicular levantada na extremidade do raio

tirada pela origem e compreendida entre essa origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

Assim a tangente do arco A M ou do ângulo A O M é a relação $\frac{AT}{OA}$

Chama-se *cotangente* de um arco a relação ao raio dêsse arco, da tangente tirada pela extremidade do diâmetro B B' e compreendida entre o ponto de tangência e o ponto de encontro com o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

Assim a *cotangente* do arco AM ou do ângulo AOM é a relação $\frac{BS}{OA}$

Chama-se *secante* de um arco a relação ao raio dêsse arco da reta que une o centro à extremidade da tangente.

Assim a secante do arco AM ou do ângulo AOM é a relação $\frac{OT}{OA}$

Chama-se *cosecante* de um arco a relação ao raio dêsse arco da reta que une o centro à extremidade da cotangente.

Assim a cosecante do arco A M ou do ângulo A O M é a relação $\frac{OS}{OA}$

Trigonométricamente falando convenciona-se, uma vez por todas, tomar por unidade de comprimento o raio O A do círculo considerado.

Desse modo as seis relações trigonométricas do arco A M ou do ângulo AOM reduzem-se aos numeradores das relações apresentadas e tomam o nome de *linhas trigonométricas*.

Sendo o triângulo O M P retângulo, os ângulos M O P e OMP são complementares.

O *coseno*, a *cotangente* e a *cosecante* de um arco, são o *seno*, a *tangente* e a *secante* do complemento dêsses ângulos ou arcos. O *coseno* a *cotangente* e a *cosecante*, são denominadas *linhas complementares*.

Pelo que foi exposto anteriormente pode-se dizer, face ao triângulo retângulo M O P, que

$$\text{(seno de O) ou sen O} = \frac{\text{M P (cateto oposto ao ângulo)}}{\text{OA (hipotenusa do triângulo)}}$$

$$\text{(coseno de O) ou cos O} = \frac{\text{O P (cateto adjacente ao ângulo)}}{\text{OM (hipotenusa do triângulo)}}$$

Considerando que os triângulos MOP e TOA são semelhantes e que nos permitem escrever:

$$\frac{MP}{OP} = \frac{AT}{OA}$$

Atendendo a que $\frac{AT}{OA}$ é a tangente de M O A, conclue-se que (tangente de O) ou $\text{tg O} = \frac{MP}{OP}$

Como porém $\frac{MP}{OA}$ e $\frac{OP}{OA}$ são os *seno* e *coseno* dos ângulos M O A, segue-se que:

$$\text{tg O} = \frac{\frac{MP}{OA}}{\frac{OP}{OA}} = \frac{\text{sen O}}{\text{cos O}}$$

Por um raciocinio idêntico concluimos que:

$$\text{(cotangente de O) ou cotg O} = \frac{\text{cos O}}{\text{sen O}}$$

$$\text{(secante de O) ou sec O} = \frac{1}{\text{cos O}} \text{ e que}$$

$$\text{(cosecante de O) ou cosec O} = \frac{1}{\text{sen O}}$$

Na tabela anexa (*Tábua de linhas naturais*) encontramos nas colunas extremas os ângulos variando de grau em grau, desde zero graus até 45°, na da esquerda e de 45° até 90°, de baixo para cima, na coluna da direita.

Nas quatro outras colunas encontramos, na parte de cima, os nomes das quatro linhas trigonométricas (seno, coseno, tangente e cotangente) e na parte de baixo coseno, seno, cotangente e tangente.

Se o ângulo cuja linha trigonométrica pretendemos calcular, estiver compreendido entre 0° e 45° inclusive, ao lado de seu valôr assinalado na coluna da esquerda, obteremos o seno, o coseno, a tangente e a cotangente, na mesma linha e em cada uma das colunas designadas em cima.

Assim:

sen 23° = 0,39073
cos 23° = 0,92050
tg 23° = 0,42447
cotg23 = 2,35585

Se o ângulo, entretanto fôr maior do que 45°, seu valor deverá ser procurado na coluna mais da direita e os valôres das linhas, procuradas nas demais colunas, de acôrdo com as designações que estiverem assinaladas em baixo das mesmas.

Assim:

sen 63° = 0,89101
cos 63° = 0,45399
tg 63° = 1,96261
cotg 63° = 0,50953

Inversamente podemos conhecer o valôr de uma qualquer das linhas trigonométricas e obter na tábua o valôr do arco correspondente.

No caso de não termos um número inteiro de graus e desejarmos calcular uma qualquer das linhas trigonométricas

dêle, teremos que fazer o que se chama *interpolação*. Se possuirmos para valôr da linha trigonométrica um número que também não se encontra na tábua, torna-se necessário fazer uma *interpolação*.

Os dois casos serão explicados com detalhes nos exercícios resolvidos.

Para o caso dos ângulos de 30°, 45° e 60°, a resolução de um triângulo retângulo de hipotenusa 1 e de ângulos agudos 30° e 60°, permite-nos calcular os catetos do triângulo retângulo que são os seno e coseno dos ângulos isto é, o cateto oposto ao de 30°, o seno de 30°; o oposto ao ângulo de 60°, o coseno de 30°.

No caso do ângulo de 45°, o triângulo, além de retângulo é isósceles e por ter a hipotenusa 1, não apresenta dificuldades para a determinação dos catetos que, sendo iguais, mostram serem iguais o seno e o coseno de 45°.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determinar com o auxílio da tábua o cos 38° e o sen 70°.

Na coluna da esquerda encontramos o ângulo de 38°. Na coluna encimada por *coseno* e na mesma linha em que se encontra 38°, achamos: cos 38° = 0,78801. Na coluna da direita encontramos 70° e o seno na mesma linha e na coluna que tem em baixo escrito seno. Assim achamos: sen 70° = 0,93969.

2) Determinar com o auxílio da tábua a tg 30° 15' e a cotg 20° 15' 30"

No que diz respeito a 30° a tangente é, de acôrdo com o explicado: tg 30° = 0,57735

Mas 30° 15' é maior que 30° e menor que 31°.

Para as tg 31° e tg 30° encontramos na tábua, depois do que foi explicado;

$$\text{tg } 31° = 0{,}60086$$
$$\text{tg } 30° = 0{,}57735$$

A diferença entre elas é de: 0,02351, quando a variação é de 31° — 30° = 1° ou 60'. Façamos então a regra de três:

$$0{,}02351 \text{ — } 60'$$
$$x \text{ — } 15'$$

$$x = \frac{15 \times 0{,}02351}{60} = 0{,}00587$$

Na tábua observa-se que a tangente cresce com o ângulo; então:

$$\text{tg } 30° \, 15' = 0{,}57735 + 0{,}00587 = 0{,}58322$$

Para a cotg 20° 15' 30" procederíamos como para o caso da tangente. Assim:

$$\text{cotg } 20° = 2{,}74748$$

A cotg 21° = 2,60509

A diferença entre elas é:

$$\begin{array}{r} \text{cotg } 20° = 2{,}74748 \\ \text{cotg } 21° = 2{,}60509 \\ \hline 0{,}14239 \end{array}$$

Temos então:

$$0{,}14239 \text{ — } 1° \text{ ou } 60' \text{ ou } 3600"$$
$$x \text{ — } 15' \; 30" = 930"$$

$$x = \frac{0{,}14239 \times 930}{3600} = 0{,}03678$$

Observamos na tábua que a cotangente decresce a medida que o ângulo cresce; então:

$$\text{cotg } 20° \; 15' \; 30" = 2{,}74748 - 0{,}03678 = $$
$$= 2{,}71070$$

3) O seno de um arco é igual a 0,60182; qual é êsse arco?

Na tábua, na coluna correspondente aos senos, procura-se um valôr igual ao dado e no caso dêle alí se encontrar, o arco é o correspondente ao número de graus que estiver na mesma linha do valôr encontrado, nas colunas onde estão os graus.

No caso, 37º.

4) A tangente de um arco é igual a 1,63234; calcular o valôr do arco.

Procurando-se na coluna das tangentes o valor da tangente dada, não encontramos exatamente o seu valôr. Procuramos então o valôr mais próximo e encontramos 1,60033 correspondente à tangente de 58º. A seguir procuramos a diferença entre as tangentes de 58º e de 59º, obtidas na tábua e teremos:

tg 59º —— 1,66428
tg 58º —— 1,60033

A diferença entre elas é de 0,06395 em virtude de 1º de diferença entre os arcos (59º — 58º = 1º). A diferença entre o valôr da tangente dada no problema e o mais próximo encontrado é:

$$\begin{array}{r} 1,63234 \\ 1,60033 \\ \hline 0,03201 \end{array} = \text{tg } 58^\circ$$

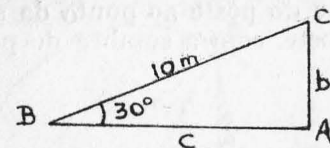
Uma regra de três acabará de resolver a questão:

0,06395 —— 60'
0,03201 —— x

$$x = \frac{60 \times 0,03201}{0,06395} = 31'$$

Então o arco cuja tangente é 1,63234 é de: 58º 31' (Vê-se na tábua que a tangente cresce com o arco e a tangente dada está compreendida entre àquelas de 58º e de 59º.

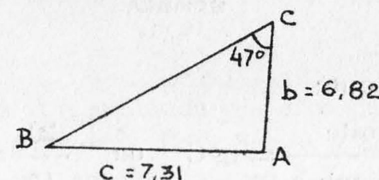
5) Resolver o triângulo retângulo sendo a = 10 m e B = 30º.



$b = a \text{ sen } 30^\circ$ e $c = a \cos 30^\circ$

$b = 10 \times 0,5 = 5\,\text{m}$ e $c = 10 \times 0,866 = 8,66\text{m}$

6) Resolver o triângulo retângulo sendo b = 6,82 m; c = 7,31 m e C = 47º



Porque é triângulo retângulo

$B = 90 - 47 = 43^\circ$

Como

$b = a \text{ sen } B$ ou $c = a \cos C$

ou o que é mais aceitável

$$\frac{b}{c} = \text{tg } B, \quad \text{teremos} \quad \frac{6,82}{7,31} = 0,9329$$

que é a tangente de B.

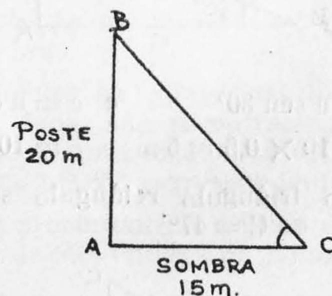
Então B é: 43º.

A expressão c = a cos 47, nos dará:

$$a = \frac{c}{\cos 47} = \frac{7,31}{0,682} = 10,7\ \text{m}$$

7) A sombra de um poste de 20 m de altura é de 15 m.

Determinar o ângulo formado por uma linha que ligue o tope do poste ao ponto da sombra mais afastada do poste, com a sombra do poste.



Sabemos que:

$$\frac{\text{poste}}{\text{sombra}} = \text{tg } C \quad \text{ou} \quad \frac{20}{15} = \text{tg } C$$

$$\text{tg } C = 1{,}33333 \quad \text{e} \quad c = 53^\circ \; 7'$$

8) Na figura do problema anterior BC representa uma escada; AB um muro e AC a distância do muro ao pé da escada. Se considerarmos o ângulo em B de 30° e a distância A C de 2,5 m a que altura do muro atinge a escada e qual o seu comprimento?

Sabemos que:

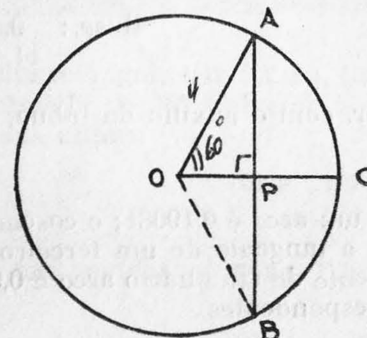
$$A\,C = B\,C \text{ sen } 30, \text{ então}$$

$$(\text{escada}) \; B\,C = \frac{A\,C}{\text{sen } 30} = \frac{2{,}5}{0{,}5} = 5 \text{ m.}$$

$$(\text{altura do muro}) \; A\,B = B\,C \cos 30^\circ \quad \text{ou}$$

$$A\,B = 5 \times 0{,}86603 = 4{,}33015 \text{ m.}$$

9) Num circulo de raio 4 cm, calcular o comprimento de sua corda que subtende um arco de 120°.



A corda A B subtende um arco de 120°. Portanto o ângulo AOB vale 120°. Sendo a corda AB perpendicular ao raio O C, o arco A C ou o ângulo A O C, vale 60° e a corda A B = 2 A P.

Calculemos A P.

Temos:

$$\frac{A\,P}{O\,A} = \text{sen } 60^\circ \quad \text{ou} \quad A\,P = O\,A \text{ sen } 60^\circ \quad \text{ou}$$

$$A\,P = 4 \times 0{,}86603 = 3{,}46412 \text{ cm}$$

Então:

$$A\,B = 2\,A\,P = 2 \times 3{,}46412 = 6{,}92824 \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) Determinar, com o auxílio da tábua, o cos 50°; o sen 43°; a tg 85° e a cotg 19°.

RESP.: 0,64279; 0,68200; 11,43005; 2,90421

2) Determinar, com o auxílio da tábua, o sen 38° 26'.

RESP.: 0,62158

3) O seno de um arco é 0,19081; o coseno de outro arco é 0,99619; a tangente de um terceiro arco é 1,27994 e a cotangente de um quarto arco é 0,64941. Achar os arcos correspondentes.

RESP.: 11°; 5°; 52° e 57°

4) O seno de um arco é 0,62049. Calcular o arco correspondente.

RESP.: 38° 21'

5) O coseno de um arco é 0,86308, calcular o arco correspondente.

RESP.: 30° 20'

6) Resolver o triângulo retângulo sendo a = 42 m; b = 21 m.

RESP.: a $\begin{cases} B = 30° \\ C = 60° \\ c = 36{,}37 \text{ m} \end{cases}$

7) Sendo b = 8 m e B = 56° 10', determinar C, a e c

RESP.: a = 9,63 m; c = 5,36 e C = 33° 50'

8) Sendo c = 25 m; b = 56,15, determinar B, C e a.

RESP.: B = 66°; C = 24° e a = 61,46

9) Num círculo de raio igual a 46 cm, calcular o comprimento de uma corda que subtende um arco de 38°.

RESP.: 29,8 cm

10) A base de um retângulo tem 6,4 cm, forma com a diagonal um ângulo de 38°. Calcular a diagonal do retângulo e sua altura.

RESP.: altura: 5 cm
diagonal: 8,12 cm

11) O lado de um quadrado mede 125 m. Calcular a diagonal.

RESP.: 176,20 m

12) Uma corda AC de 6 dm forma com um diâmetro AB um ângulo de 36°. Calcular o raio do círculo.

RESP.: 2,42 dm

13) Um balão está prêso a uma corda de 450 m de comprimento. Devido ao vento, esta corda está esticada e forma um ângulo de 65° com o terreno. Calcular a altura do balão.

RESP.: 407,83 m

14) Um lado de um losango mede 213 m e forma um ângulo de 32° com uma das diagonais. Calcular as duas diagonais.

RESP.: d = 225,74 m; D = 361,27

15) Em um triângulo isósceles cada um dos ângulos adjacentes à base tem 54° e a base mede 12 m. Calcular os outros dois lados e a altura.

RESP.: lado = 10,20 m
altura = 8,256 m

TABELA DOS SENOS, COSSENOS, TANGENTES E COTANGENTES

	S E N O	COSSENO	TANGENTE	COTANGENTE	
0°	0,00000	1,00000	0,00000	infinito	90°
1°	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89°
2°	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88°
3°	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87°
4°	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86°
5°	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85°
6°	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84°
7°	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83°
8°	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82°
9°	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81°
10°	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80°
11°	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79°
12°	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78°
13°	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77°
14°	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76°
15°	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75°
16°	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74°
17°	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73°
18°	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72°
19°	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71°
20°	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70°
21°	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69°
22°	0,37461	0,92718	0,40043	2,47509	68°
23°	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67°
24°	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66°
25°	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65°
26°	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64°
27°	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63°
28°	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62°
29°	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61°
30°	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60°
31°	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59°
32°	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58°
33°	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57°
34°	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56°
35°	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55°
36°	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54°
37°	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53°
38°	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52°
39°	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51°
40°	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50°
41°	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49°
42°	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48°
43°	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47°
44°	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	46°
45°	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45°
	~~S E N O~~ COSENO	COSSENO SENO	~~TANGENTE~~ COTANGENTE	COTANGENTE TANGENTE	

RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER

Teorema 1

Em um triângulo acutângulo o quadrado do lado aposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dôbro do produto de um destes lados, pela projeção do outro sôbre êle.

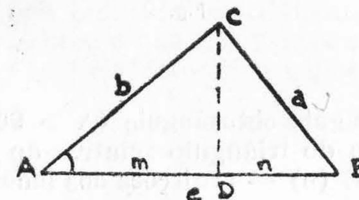


Fig. 1

Na figura 1

ABC — triângulo acutângulo ($\hat{A} < 90^\circ$)

CD — altura relativa ao lado *c*

AD (m) e BD (n) — projeções dos lados *b* e *a* sôbre o lado *c*

Relação

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,cm$$

Teorema 2

Em um triângulo obtusângulo o quadrado do lado aposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados dos outros

dois, mais o dôbro de um destes lados pela projeção do outro sôbre êle.

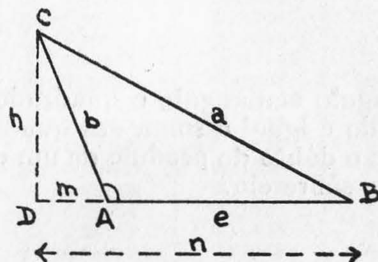


Fig. 2

Na figura 2

ABC — triângulo obtusângulo ($A > 90^o$)
CD — altura do triângulo relativa ao lado c
DA (m) e DB (n) — projeções dos lados *b* e *a* respectivamente, sôbre o lado *c*.

Relação

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,cm$$

As duas relações dadas anteriormente podem ser sintetisadas como se segue:

O quadrado de um lado qualquer de um triângulo (acutângulo, retângulo ou obtusângulo) é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dôbro do produto deles pelo coseno do ângulo que eles formam.

Relação

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Síntese de Clairaut

As relações

$a^2 = b^2 + c^2$ (triângulo retângulo)
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,cm$ (triângulo acutângulo)
$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,cm$ (triângulo obtusângulo)

Constituem a síntese de Clairaut. Ela nos permite, conhecendo os lados de um triângulo, saber a sua natureza.

Teorema 3

O produto de dois lados de um triângulo é igual ao quadrado da bissetriz o ângulo que eles formam, mais o produto dos dois segmentos que ela determina sôbre o terceiro lado.

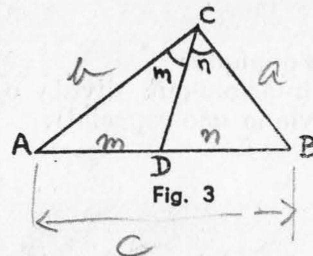


Fig. 3

Na figura 3

ABC — triângulo qualquer.
CD — bissetriz do ângulo C.
AD e DB — segmentos determinados no terceiro lado AB.

Relação

$$AC \times CB = CD^2 + AD \times BD$$

Teorema 4 (Stewart)

Se em um triângulo une-se o vértice a um ponto qualquer da base, o quadrado dessa reta, multiplicado pela base,

é igual à soma dos quadrados dos outros lados, cada um dêles sendo multiplicado pelo segmento oposto à base, menos o produto obtido multiplicando-se cada um de seus dois segmentos peia base.

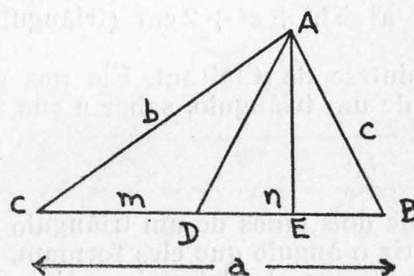


Fig. 4

Na figura 4

ABC — triângulo qualquer
AD — segmento interior que divide o lado *a* em dois segmentos *m* e *n* (seviana não especial).

Relação

$$\frac{b^2}{am} - \frac{AD^2}{mn} + \frac{c^2}{an} = 1 \quad \text{ou}$$

$$a\,AD^2 = b^2n + c^2m - amn$$

Como se vê, os numeradores são os quadrados dos segmentos de retas que concorrem no ponto A e os denominadores, os produtos do lado interceptado pelos segmentos de retas concorrentes, pelos segmentos determinados sôbre aquele lado; ao segmento da reta intermediária (AD no caso da figura) corresponde o têrmo negativo.

ALTURAS RELATIVAS AOS LADOS DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

relativa ao lado *a*: $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

relativa ao lado *b*: $h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

relativa ao lado *c*: $h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

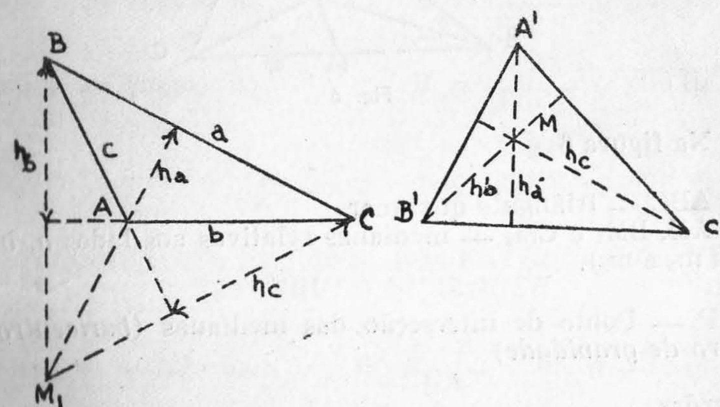


Fig. 5

Na figura 5

Triângulos ABC e A'B'C', obtusângulo e acutângulo.
h_a, h_b, h_c — em ambos os triângulos, alturas relativas aos lados *a*, *b* e *c*.

M e M_1 — pontos de encontro das alturas, denominado *ortocentro*.

MEDIANAS RELATIVAS AOS LADOS DE UM TRIANGULO QUALQUER

Teorema 5

As medianas de um triângulo se encontram num ponto do interior do triângulo, situado a dois têrços de cada uma, a partir do vértice respectivo e a um têrço da base.

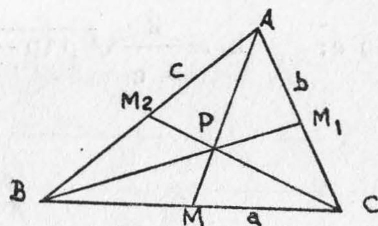


Fig. 6

Na figura 6

ABC — triângulo qualquer.
AM, BM_1 e CM_2 — medianas relativas aos lados *a, b* e *c* (m_a, m_b e m_c).

P — Ponto de interseção das medianas (*baricentro* ou *centro de gravidade*)

Relações

$$AP = \frac{2}{3} AM; \quad PM = \frac{1}{3} AM$$

$$BP = \frac{2}{3} BM_1; \quad PM_1 = \frac{1}{3} BM_1$$

$$CP = \frac{2}{3} CM_2; \quad PM_2 = \frac{1}{3} CM_2$$

mediana relativa a *a*: $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2 (b^2 + c^2) - a^2}$

mediana relativa a *b*: $m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2 (a^2 + c^2) - b^2}$

mediana relativa a *c*: $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2 (a^2 + b^2) - c^2}$

BISSETRIZES DOS ANGULOS INTERNOS DE UM TRIANGULO QUALQUER

relativa ao ângulo A: $B_A = \frac{2}{b + c} \sqrt{pbc (p - a)}$

relativa ao ângulo B: $B_B = \frac{2}{a + c} \sqrt{pbc (p - b)}$

relativa ao ângulo C: $B_C = \frac{2}{a + b} \sqrt{pbc (p - c)}$

BISSETRIZES DOS ANGULOS EXTERNOS DE UM TRIANGULO QUALQUER

relativa ao ângulo ext. A: $B'_A = \frac{2}{b - c} \sqrt{bc (p - b) (p - c)}$

relativa ao ângulo ext. B: $B'_B = \frac{2}{a - c} \sqrt{ac (p - a) (p - c)}$

relativa ao ângulo ext. C: $B'_C = \frac{2}{a - b} \sqrt{ab (p - a) (p - b)}$

RAIO DO CIRCULO INSCRITO NUM TRIANGULO QUALQUER

$$r = \frac{S}{p}$$

RAIO DO CÍRCULO CIRCUNSRITO A UM TRIANGULO QUALQUER

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Nas expressões apresentadas:

a, b, c — lados do triângulo
p — semi perímetro do triângulo
S — área do triângulo

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determinar a natureza de um triângulo cujos lados medem respectivamente, 11 m; 13 m e 20 m.

A síntese de Clairaut nos informará.
Se o triângulo fôsse retângulo, sua hipotenusa teria 20 m; então poderemos escrever, em princípio:

$$20^2 = 11^2 + 13^2 \pm \ldots \quad \text{ou}$$
$$400 = 121 + 169 \pm$$

ou para haver igualdade:

$$400 = 290 + \ldots$$

Esse resultado se assemelha à relação

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,cm$$

obtida de um triângulo obtusângulo.
Então o triângulo do problema é obtusângulo.

2) Determinar a natureza de um triângulo cujos lados medem 10, 15 e 18 metros.

Como no exemplo anterior escrevamos:

$$18^2 = 10^2 + 15^2 \pm \ldots \quad \text{ou}$$
$$324 = 100 + 225 \pm \ldots \quad \text{ou}$$

Para haver igualdade:

$$324 = 325 - \ldots$$

Esse resultado se assemelha à relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,cm$$

obtida de um triângulo acutângulo. Então o triângulo do problema é acutângulo.

3) Determinar a natureza do triângulo cujos lados medem respectivamente 13, 12 e 5 metros.

Como das vêzes anteriores

$$13^2 = 12^2 + 5^2 \pm \ldots \quad \text{ou}$$
$$169 = 144 + 25 \pm \ldots$$

Para haver igualdade:

$$169 = 169$$

Conclue-se então que o resultado obtido se assemelha à relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

correspondente a um triângulo retângulo.

4) A base de um triângulo tem 13 m e os dois outros lados teem respectivamente 11 m e 20 m. Calcular as projeções desses dois últimos lados sôbre a base.

Vejamos inicialmente a natureza do triângulo. Tratando-se porém do triângulo do problema 1 do presente capítulo, vimos ser êle obtusângulo. A figura 2 se aplica ao caso do problema e nela teremos que calcular DA ou *m* e DB, projeções dos lados *b* e *a*, sôbre o lado *c*.

A relação

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,cm,$$

na qual a = 20; b = 11 e c = 13, nos dá:

$$400 = 121 + 169 + 2 \times 13 \times m \quad \text{ou}$$

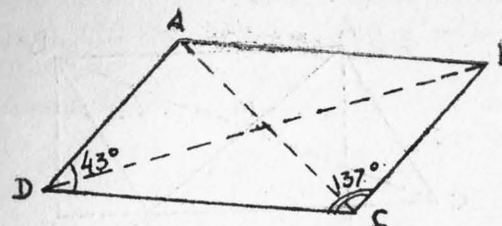
$$m = \frac{400 - 290}{2 \times 13} = 4{,}22\ \text{m}$$

A figura nos mostra que:

$$DB = DA + AC; \quad \text{então}$$

$$DB = 4{,}22 + 13 = 17{,}22\ \text{m}$$

5) Calcular as diagonais de um paralelogramo, onde dois lados consecutivos formam um ângulo de 43° e medem respectivamente 5 cm e 7 cm.



Trata-se de calcular AC e BD, lados dos triângulos ADC e BDC, acutângulo e obtusângulo, respectivamente.

Para ambos os casos teremos a expressão:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

citada no início do capítulo.

Teremos então para ambos os casos:

$$a^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos 43° \quad \text{e}$$

$$a^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos 137° \quad \text{ou}$$

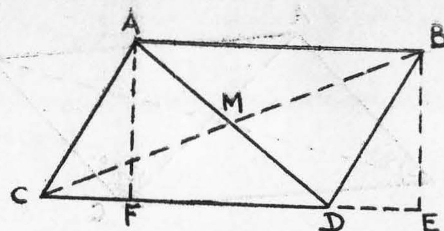
$$a^2 = 25 + 49 - 70 \times 0{,}731 \ (\cos 43° = 0{,}73135)$$

$$a^2 = 22{,}83 \quad \text{e} \quad a = 4{,}77\ \text{cm} \quad \text{e}$$

$$a^2 = 25 + 49 - 70 \times (-0{,}731) \ (\cos 137° = -\cos 43° = -0{,}73135)$$

$$a^2 = 125{,}17 \quad \text{e} \quad a = 11{,}18\ \text{cm}$$

6) Dois lados adjacentes de um paralelogramo medem 8 m e 10 m, respectivamente; uma diagonal mede 6 m. Calcular a outra diagonal.



No triângulo ACD podemos calcular AF (altura relativa ao lado CD).

$$h = \frac{2}{CD} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{8 + 10 + 6}{2} = 12 \quad e$$

$$h = \frac{2}{10} \sqrt{12(12-8)(12-10)(12-6)} =$$
$$= 4{,}8 \text{ m}$$

No triângulo retângulo ACF temos:

$$CF^2 = AC^2 - AF^2 \quad ou$$

$$CF^2 = 64 - 23{,}04 = 40{,}96 \text{ m}^2 \quad e \quad CF = 6{,}4 \text{ m}$$

Sendo CF = DE o triângulo retângulo CBE, dá:

$$CB^2 = CE^2 + EB^2; \quad \text{mas como}$$

$$CE = CD + DE \quad ou$$

$$CE = 10 + 6.4 = 16.4 \text{ m}.$$

Então:

$$CB^2 = (16{,}4)^2 + (4{,}8)^2 \quad e$$

$$CB^2 = 268{,}96 + 23{,}04 = 292 \quad e$$

$$CB = 17{,}08 \text{ m}.$$

Outra solução

Na figura, CM é a mediana relativa ao lado AD, do triângulo CAD.

Vamos calculá-la.

$$CM = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} \quad ou$$

$$CM = \frac{1}{2} \sqrt{2(64 + 100) - 36}$$

$$CM = \frac{1}{2} \sqrt{328 - 36} = \frac{1}{2} \sqrt{292}$$

$$CM = \frac{1}{2} \times 17{,}088$$

considerando, porém, que

$$CM = MB,$$

segue-se que

$$CB = 2\,CM \quad ou$$

$$CB = \frac{1}{2} \times 17{,}088 \times 2 = 17{,}088 \text{ m}$$

7) Os lados de um triângulo medem 5 dm, 8 dm e 10 dm. Calcular a ceviana que divide o lado maior em dois segmentos de 2 dm e 8 dm, respectivamente, sendo o menor segmento contiguo ao menor lado.

A figura 4 do teorema de Stewart da, para o problema:

AB = c = 5 dm; CB = a = 10 dm; AC = b = 8 dm; BD = 2 dm e CD = 8 dm.

Temos a relação

$$\frac{b^2}{am} - \frac{AD^2}{mn} + \frac{c^2}{an} = 1 \quad ou$$

depois de fazer as substituições:

$$\frac{64}{80} - \frac{AD^2}{16} + \frac{25}{20} = 1 \quad \text{ou}$$

$$\frac{64 - 5\,AD^2 + 100}{80} = 1 \quad \text{ou}$$

$$64 + 100 - 80 = 5\,AD^2$$

$$84 = 5\,AD^2 \qquad AD^2 = 16{,}8 \quad \text{e}$$

$$AD = 4{,}09 \text{ dm}$$

8) Dois lados de um triângulo medem respectivamente 8 cm e 5 cm e fazem um ângulo de 60°. Calcular o terceiro lado e sua projeção sôbre o menor lado.

Temos a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

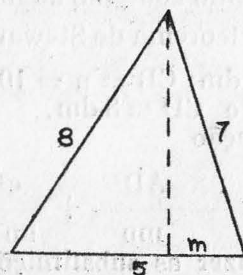
na qual b, c e A são conhecidos. Então:

$$a^2 = 64 + 25 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2} \quad \text{ou}$$

$$a^2 = 89 - 40 = 49 \quad \text{e} \quad a = 7 \text{ cm}$$

$$\left(\cos 60° = \frac{1}{2} \right).$$

Calculemos agora a projeção desse lado sôbre o menor.



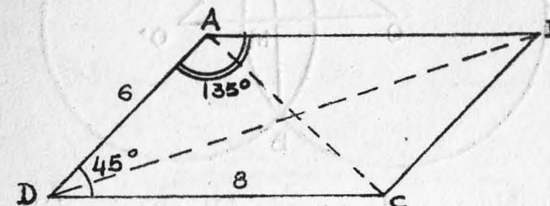
O teorema 1, dá:

$$8^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times m \quad \text{ou}$$

$$m = 1 \text{ cm}.$$

9) Calcular as diagonais de um paralelogramo, sabendo que dois lados consecutivos medem 6 dm e 8 dm e formam um ângulo de 45°.

Esse exercício pode ser resolvido com o teorema de Pitágoras. Vamos resolvê-lo porém com o auxílio dos teremas 1 e 2 do presente capítulo.



O triângulo ADC é acutângulo, então:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2\,AD \times DC \cos D \quad \text{ou}$$

$$AC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{5} \quad \text{ou}$$

$$AC^2 = 32{,}32 \quad \text{e} \quad AC = 5{,}7 \text{ dm}.$$

Ao triângulo DAB obtusângulo também se aplica

$$DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2\,AD \times AB \cos A \quad \text{ou}$$

$$DB^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{ou}$$

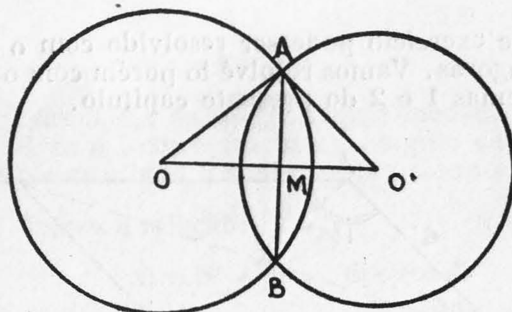
$$DB^2 = 36 + 64 + 48\sqrt{2} \quad \text{ou}$$

$$DB^2 = 167{,}68 \qquad DB = 12{,}9 \text{ dm}$$

10) Os raios de dois círculos secantes medem 14 cm e 30 cm e a distância dos centros, 40 cm. Calcular a corda comum.

Este problema, com outros dados foi resolvido no capítulo "Relações métricas no triângulo retângulo".

Vamos resolvê-lo aqui, de outro modo.



O problema pede a corda AB, que é o dôbro de AM, que por sua vez é a altura do triângulo AOO', relativa ao lado OO'.

Teremos então:

$$AM = \frac{2}{OO'}\sqrt{p(p - OO')(p - OA)(p - AO')} \quad \text{ou}$$

$$AM = 8{,}4 \quad \text{e} \quad AB = 2 \times AM = 16{,}8 \text{ m}$$

11) Determinar o ângulo A de um triângulo ABC, sabendo que subsiste entre os seus lados a relação: $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. (Exercícios de Geometria Alencar Filho).

A relação:

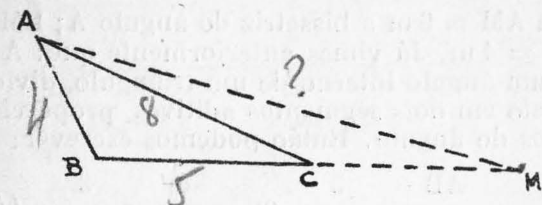
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

é pràticamente a mesma fornecida no problema. Para que elas sejam iguais torna-se necessário que

$$2 \cos A = 1 \quad \text{ou}$$

$$\cos A = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad A = 60^\circ$$

12) Os lados de um triângulo medem 4 m; 5 m e 8 m. Prolonga-se o lado de 5 m de uma quantidade igual a ele. Pede-se a reta que unirá o vértice oposto ao lado prolongado à extremidade do lado prolongado.



Com o prolongamento do lado BC de um comprimento CM igual a ele o lado AC passou a ser a mediana relativa ao lado BM, do triângulo ABM, cujos lados AB = 4 m e BM = 10 m conhecemos e cuja mediana (lado AC), tem 8 m.

A fórmula da mediana nos permitirá calcular o lado AM. Teremos:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \quad \text{ou}$$

$$8 = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + 16) - 100} \quad \text{ou}$$

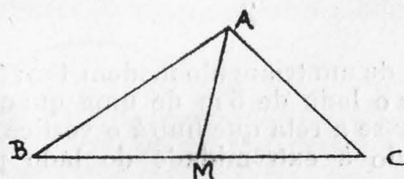
$$16 = \sqrt{2(b^2 + 16) - 100} \quad \text{ou}$$

$$256 = 2(b^2 + 16) - 100 \quad \text{ou}$$

$$128 = b^2 + 16 - 50 \quad \text{ou}$$

$$b^2 = 162\,m^2 \quad e \quad b = 12{,}73\,m$$

13) A bissetriz do ângulo A de um triângulo mede 6 m e determina no lado BC segmentos de 3 m e 4 m. Calcular os lados AB e AC do triângulo.



Seja AM = 6 m a bissetriz do ângulo A; BM = 3 m e MC = 4 m. Já vimos anteriormente que: A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo, divide o lado oposto em dois segmentos aditivos, proporcionais aos lados do ângulo. Então podemos escrever:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{b} = \frac{3}{4} \quad (A)$$

Por outro lado, a fórmula da bissetriz relativa ao lado *a*, é:

$$B_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc\,(p-a)} \quad (B)$$

Posto isto, as equações A e B, que formam um sistema, darão a solução do problema.

$$6 = \frac{2}{b+c}\sqrt{\frac{7+b+c}{2} \times bc \times \left(\frac{7+b+c}{2} - 7\right)}$$

A equação (A), dá:

$$b = \frac{4c}{3},$$

que substituido no valôr da bissetriz, dá:

$$6 = \frac{2}{\frac{4c}{3} + c}\sqrt{\frac{7 + \frac{4c}{3} + c}{2} \times \frac{4c}{3} \times c \times \left[\frac{7 + \frac{4c}{3} + c}{2} - 7\right]}$$

ou

$$6 = \frac{6}{7c}\sqrt{\frac{21+7c}{6} \times \frac{4c^2}{3}\left[\frac{21+7c}{6} - 7\right]} \quad \text{ou}$$

$$1 = \frac{2c}{7c}\sqrt{\frac{21+7c}{18} \times \left[\frac{21+7c}{6} - 7\right]} \quad \text{ou}$$

$$1 = \frac{4}{49} \times \left[\frac{441 + 294c + 49c^2}{108} - \frac{147 + 49c}{18}\right] \quad \text{ou}$$

$$\frac{49}{4} = \frac{441 + 294c + 49c^2 - 882 - 294c}{108} \quad \text{ou}$$

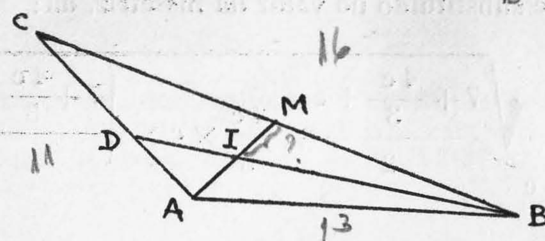
$$\frac{49}{4} = \frac{49c - 441}{108} \quad \text{ou}$$

$$196\,c^2 = 7056 \quad e \quad c = 6$$

Com o valôr de *c* na equação A, tira-se: b = 8.

14) Os lados de um triângulo são: AB = 13 m; AC = 11 m e BC = 16 m; a mediana AM e a bissetriz interna BD cortam-se em I. Calcular IM.

(Ex ER. Geometria E. Alencar Filho)



Calculemos AM.

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2} \quad \text{ou}$$

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(121 + 169) - 256} = 9\ \text{m}$$

No triângulo MAB, conhecemos os seus três lados, isto é: MB = 8 m; AM = 9 m e AB = 13 m.

Teorema da bissetriz

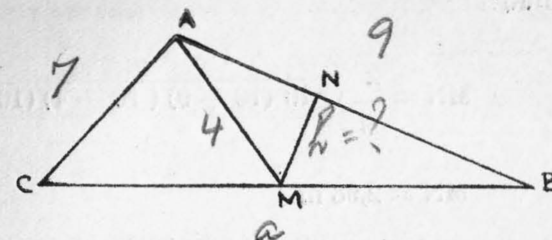
Podemos pois calcular os segmentos MI e AI em que a bissetriz de B, divide o lado AM, aplicando o teorema empregado no problema anterior.

$$\frac{MI}{IA} = \frac{8}{13}$$

$$\frac{MI + IA}{MI} = \frac{8 + 13}{8} \quad \text{ou} \quad -$$

$$\frac{91}{MI} = \frac{21}{8} \quad \text{e} \quad MI = 3{,}42\ \text{m}$$

15) Num triângulo ABC, AB = 9 m, AC = 7 m, e a mediana AM = 4 m. Calcular a distância do pé da mediana ao lado AB.



No triângulo ABC, temos AB = 9 m; AC = 7 m e AM = 4 m.

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2}$$

nos permite calcular CB (*a*). Temos:

$$4 = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(49 + 81) - a^2} \quad \text{ou}$$

$$64 = 2 \times 130 - a^2 \quad \text{e}$$

$$a^2 = 196 \quad \text{e} \quad a = 14\ \text{m}.$$

Consequentemente:

$$MB = \frac{14}{2} = 7\ \text{m}.$$

No triângulo AMB, MN é a altura relativa ao lado AB e também a distância do ponto M ao lado AB.

Sendo assim:

$$MN = \frac{2}{AB}\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

na qual p = 10

Então:

$$MN = \frac{2}{9}\sqrt{10\,(10-9)\,(10-4)\,(10-7)} \quad \text{ou}$$

$$MN = 2{,}98 \text{ m}$$

16) Achar os lados de um triângulo, cujo perímetro é 36, sabendo que as suas alturas são proporcionais aos números a 6, 3 e 2.

O problema diz:

$$a + b + c = 36$$

e também:

$$\frac{\frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{6} = \frac{\frac{2}{b}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{3} = \frac{\frac{2}{c}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{2}$$

ou, depois de dividir as três igualdades por $2\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$

$$\frac{1}{6a} = \frac{1}{3b} = \frac{1}{2c}$$

que pode ser escrito

$$\frac{\frac{1}{6}}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{c}$$

Aplicando as proporções, vem:

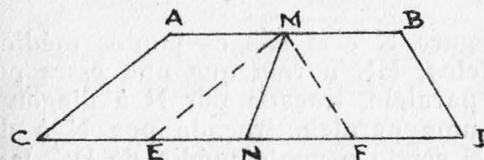
$$\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{a+b+c} = \frac{\frac{1}{6}}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{c} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\frac{6}{6}}{36} = \frac{\frac{1}{6}}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{c} \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{6a} = \frac{1}{3b} = \frac{1}{2c} \quad \text{e}$$

$$a = 6 \text{ m}; \; b = 12 \text{ m} \;\; \text{e} \;\; c = 18 \text{ m}$$

17) As bases de um trapézio medem 25 m e 32 m e os lados não paralelos 7 m e 12 m. Calcular a distância entre os pontos médios das bases.



Os pontos M e N são os meios das bases do trapézio e MN é a distância pedida.

As retas ME e MF são paralelas às retas AC e BD, respectivamente; por isso AM = CE e BM = DF. *Consequentemente*: EF = 7 m

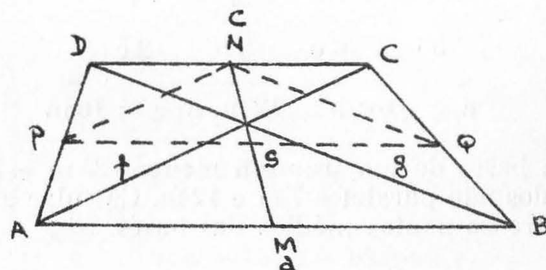
No triângulo MEF, MN é a mediana relativa ao lado EF. Calculemos o seu valor.

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{2(ME^2 + MF^2) - EF^2}$$

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(49 + 144) - 49}$$

$$MN = 9{,}18 \text{ m}$$

18) Em função das bases *a* e *b* de um trapézio e das diagonais *f* e *g* exprimir o comprimento da reta que une os meios dos lados paralelos.



Na figura N e M são os pontos médios dos lados paralelos; MN a reta que une esses pontos. NP é uma paralela, traçada por N à diagonal AC (f) e NQ, uma paralela traçada por N à diagonal BD (g). N sendo o ponto médio de DC, lado do triângulo DAC, a paralela ao lado AC é igual à sua metade (teorema citado no capítulo "Triângulos"). Pelo mesmo motivo NQ é a metade de DB.

Por outro lado PQ foi traçada pelos pontos médios de AD e BC, consequentemente é paralela as bases *a* e *c* e equidistante delas; então é a ***base média*** do trapézio, igual a: $PQ = \frac{a + c}{2}$

Temos então:

$$PN = \frac{f}{2}; \quad NQ = \frac{g}{2} \quad \text{e} \quad PQ = \frac{a + c}{2}$$

$$NS = \frac{MN}{2}$$

Não pode haver dúvida que NS é a mediana do triângulo NPQ relativa ao lado PQ.

A aplicação da fórmula da mediana relativa ao lado PQ sendo

$$NS = \frac{1}{2}\sqrt{2\,PN^2 + 2\,NQ^2 - PQ^2} \quad \text{ou}$$

$$\frac{MN}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \times \frac{f^2}{4} + 2 \times \frac{g^2}{4} - \left(\frac{a + c}{2}\right)^2} \quad \text{ou}$$

$$\frac{MN^2}{4} = \frac{2 \times \frac{f^2}{4} + 2 \times \frac{g^2}{4} - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{4} \quad \text{ou}$$

$$MN^2 = \frac{f^2 + g^2}{2} - \frac{1}{4}(a + c)^2 \text{ou}$$

$$MN^2 = \frac{2(f^2 + g^2 - ac) - (a^2 + c^2)}{4}$$

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{2(f^2 + g^2 - ac) - (a^2 + c^2)}$$

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) Dizer a natureza do triângulo cujos lados medem respectivamente: 8, 9 e 15 metros.

RESP.: Obtusângulo

2) Dizer a natureza do triângulo cujos lados medem respectivamente 8, 9 e 10 metros.

RESP.: Acutângulo

3) Dizer a natureza do triângulo cujos lados medem respectivamente 25, 7 e 24 metros.

RESP.: Retângulo

4) Os lados de um triângulo medem 20, 15 e 7 metros. Sua base é o lado 15 m. Calcular as projeções dos outros lados sobre ele.

RESP.: 4,2 m e 19,2 m

5) Os lados de um triângulo medem 7 m, 5 m e 3 m. Calcular o valôr da projeção do menor lado sôbre o lado médio.

C. Naval — 1960 RESP.: 1,5 m

6) Dado o triângulo ABC cujos lados são AB = 15 cm; BC = 14 cm e AC = 13 cm. Calcular a distância do vértice C ao pé da altura relativa ao lado BC.

C. Naval — 1959 RESP.: 5 cm.

7) Dois lados de um triângulo medem respectivamente 4 m e 5 m e formam um ângulo de 34°. Calcular o terceiro lado.

RESP.: 2,8 m

8) Dois lados adjacentes de um paralelogramo medem 6 m e 8 m, respectivamente; uma diagonal mede 12 m. Calcular a outra diagonal.

RESP.: 7,48 m

9) Calcular as diagonais de um paralelogramo, onde dois lados adjacentes formam um ângulo de 51° e medem respectivamente 7 cm e 8 cm.

RESP.: 6,52 cm e 13,54 cm

10) Os lados de um triângulo medem 5 cm, 7 cm e 10 cm. Calcular a ceviana que divide o maior lado internamente na razão de $^2/_3$ e o menor, segmento contíguo ao maior lado.

RESP.: 3,92 cm e 4 cm

11) Dois lados de um triângulo medem respectivamente 4 m e 5 m e formam um ângulo de 30°. Calcular o terceiro lado.

RESP.: 2,52 m

12) Calcular as alturas de um triângulo cujos lados são: $a = 10$ m; $b = 26$ m e $c = 24$ m.

RESP.: 24 m; 9,23 m e 10 m

13) Calcular, no triângulo ABC, onde $AB = 20$ dm; $AC = 22$ dm e $BC = 30$ dm a bissetriz interna AD e a bissetriz externa AM.

RESP.: 14,68 dm e 313,94 dm

14) Calcular as medidas do triângulo cujos lados medem 8 m; 9 m e 10 m.

RESP.: 6,89 m; 7,85 m e 8,63 m

15) Calcular as diagonais de um paralelogramo, sabendo que dois lados consecutivos medem 8 dm e 12 dm e formam um ângulo de 60°.

RESP.: 10,58 dm e 17,43 dm

16) No paralelogramo ABCD tem-se $AB = 10$ m, $BC = 6$ m e o ângulo $ABC = 51°$. Calcular o valôr da diagonal AC, dado $\cos 51° = 0{,}6293$.

E.P.C. Ar. — 1963 RESP.: 7,77 m

17) Os raios de dois círculos secantes medem 9 m e 10 m e a distância dos centros 17 m. Calcular a corda comum.

RESP.: 8,46 m

18) Num triângulo ABC, o lado $a = 6$ m e $c^2 - b^2 = 66$ m². Calcular as projeções dos lados *b* e *c* sôbre o lado *a*.

(Ex. Geometria Alencar Filho) RESP.: 2,5 m e 8,5 m

19) Os lados de um triângulo são 5 m; 3 m e 5,3 m. Prolonga-se o lado de 3 m de um comprimento igual a ele. Pede-se a reta que unirá o vértice oposto ao lado prolongado, à extremidade do lado prolongado.

RESP.: 7 m

20) A bissetriz do ângulo A de um triângulo mede 12,64 m e determina sôbre o lado BC segmentos de 4 m e 5 m respectivamente. Calcular os lados AB e AC do triângulo.

RESP.: 12 m e 15 m

21) Os lados de um triângulo são AB = 20 m; AC = = 22 m e BC = 30 m. A mediana AM e a bissetriz interna BD cortam-se em I. Calcular AI.

RESP.: 9,55 m

22) Num triângulo AB = 15 m; AC = 10 m e a mediana AM = 9 m. Calcular a distância do pé da mediana ao lado AB.

RESP.: 4,95 m

23) Achar os lados de um triângulo com 18 m de perímetro, sabendo que as suas alturas são proporcionais aos números 3, 4 e 6.

RESP.: 4 m; 6 m e 8 m

24) As bases de um trapézio medem 6 m e 15 m e os lados não paralelos, 5 m e 7,211 m, respectivamente. Calcular a distância entre os meios das bases.

RESP.: 4,272 m

25) As bases de um trapézio medem 4 m e 10 m e as diagonais 5 m e 10,44 m. Calcular o comprimento da reta que une os meios dos lados paralelos.

RESP.: 4,242

26) Achar o ângulo C do triângulo cujos lados são: AB = 14 m; BC = 10 m e AC = 6 m.

RESP.: 120°

27) Os lados adjacentes de um paralelogramo medem 5m e 7 m e uma diagonal 8 m. Calcular a outra diagonal.

RESP.: 9,16 m

28) Calcule, em função de a a mediana relativa ao lado a do triângulo ABC, em que $b^2 + c^2 = 2a^2$.

C. Naval — 1960 RESP.: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

29) Calcule a em um triângulo ABC, no qual $b = c = 5$ e $B = 30°$.

C. Naval — 1955 RESP.: $a = 5\sqrt{3}$

RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

Teorema 1

A ordenada de um ponto da crcunferência é igual à média proporcional, entre os segmentos que ela (ordenada) determina sôbre o diâmetro.

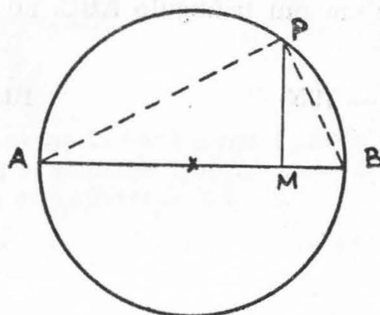


Fig. 1

Na figura 1

PM — ordenada do ponto P em relação ao diâmetro AB do círculo (Perpendicular do ponto P, considerado, sobre o diâmetro).

AM e MB — segmentos do diâmetro determinados pela ordenada PM.

Relação:

$$MP^2 = AM \times MB$$

Teorema 2

Toda corda que tem uma de suas extremidades coincidindo com uma das extremidades de um diâmero, é média proporcional entre o diâmetro todo e a sua projeção sôbre o diâmetro.

Na mesma figura 1 ,

PB — corda que tem uma extremidade coincidindo com uma das extremidades do diâmetro AB.
MB — projeção dela (corda PB) sôbre o diâmetro AB.

Relação:

$$PB^2 = AB \times MB.$$

Teorema 3

Quando duas cordas se cortam no interior de um círculo, o produto dos segmentos de uma, é igual ao produto dos segmentos da outra.

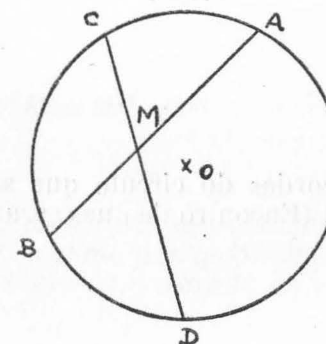


Fig. 2

Na figura 2

AB e CD — cordas que se cortam no interior do círculo.
M — Ponto de interseção das cordas.

Relação:

$$MA \times MB = MC \times MD$$

Teorema 4

Quando duas cordas se cortam fora de um círculo, os produtos das secantes ao círculo, por suas partes externas, são iguais.

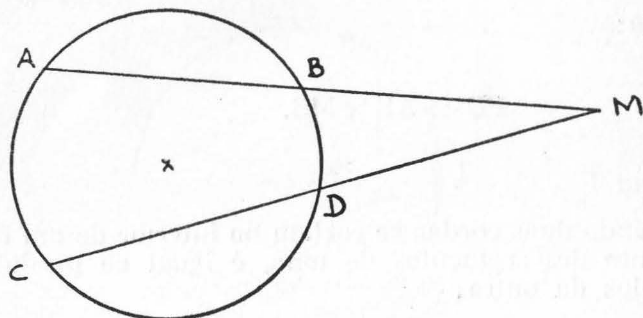


Fig. 3

Na figura 3

AB e CD — cordas do círculo que se cortam fora do círculo, no ponto M (Encontro de duas secantes a um círculo)

Relação:

$$MA \times MB = MC \times MD$$

Teorema 5

Quando uma tangente e uma secante a um círculo, se encontram, a tangente é média proporcional entre a secante e a sua parte externa.

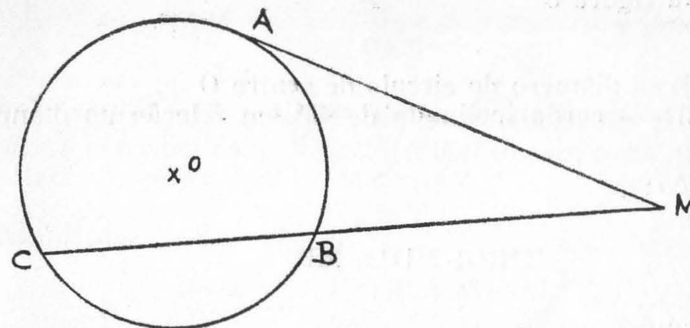


Fig. 4

Na figura 4

MA — tangente ao círculo no ponto A.
MC — secante ao círculo.
MB — parte externa da secante.

Relação:

$$MA^2 = MB \times MC.$$

Teorema 6

Quando uma corda corta um diâmetro, fazendo com ele um ângulo de 45°, a soma dos quadrados dos segmentos da corda é igual ao dôbro do quadrado do raio do círculo.

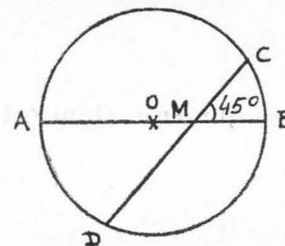


Fig. 5

Na figura 5

AB — diâmero do círculo de centro O
CD — corda inclinada de 45° em relação ao diâmetro.

Relação:

$$MC^2 + MD^2 = 2R^2$$

Teorema 7

A soma dos quadrados dos segmentos formados por duas cordas que se corta ortogonalmente, é igual ao quadrado do diâmetro.

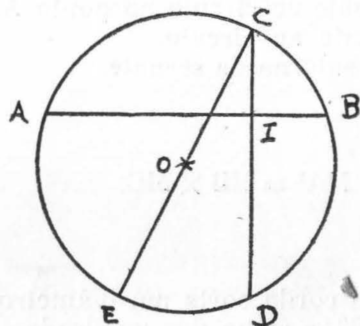


Fig. 6

Na figura 6

AB e CD — cordas que se cortam ortogonalmente.
CE — diâmetro.

Relação:

$$AI^2 + IC^2 + BI^2 + DI^2 = CE^2$$

POTÊNCIA DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UM CÍRCULO

Os teoremas 3 e 4 exprimem as potências do ponto M (interior e exterior) em relação a um círculo; negativa no caso do teorema 3; positivo no do teorema 4.

Sua expressão usual é:

$$(\text{potência})\ P = d^2 - r^2$$

na qual, *d* é a distância do ponto ao centro do círculo e *r* é o raio do círculo.

Se o ponto é interior ao círculo, sua distância ao centro é menor que o raio e a potência é negativa. Se o ponto fôr exterior ao círculo, sua distância ao centro é maior que o raio e a potência é positiva.

Se o ponto estiver sôbre a circunferência, sua distância ao centro é igual ao raio, e então sua potência é nula.

Teorema 8

A potência do ponto M interior ao círculo O, em relação ao círculo e expressa em função da menor corda que passa por ele, é igual ao quadrado da metade da referida corda.

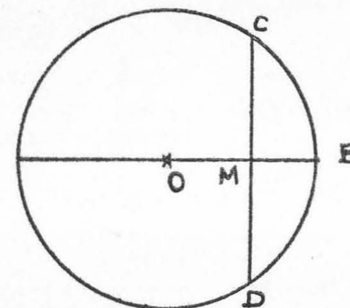


Fig. 7

Na figura 7

AB — diâmetro.
CD — menor corda que passa pelo ponto M.

Relação:

$$P = CM^2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Uma ordenada determina sôbre um diâmetro segmentos de 4 cm e 16 cm. Determinar a ordenada.

A figura 1 permitiu-nos escrever a relação decorrente do teorema 1.

$$MP^2 = AM \times MB$$

No caso do problema, AM e MB são respectivamente 4 cm e 16 cm; então:

$$MP^2 = 4 \text{ cm} \times 16 \text{ cm} = 64 \text{ cm}^2 \quad \text{e}$$

$$MP = \sqrt{64 \text{ cm}^2} = 8 \text{ cm}$$

2) Num círculo de 9 cm de raio traça-se uma corda de 6 cm. Calcular a projeção da corda sôbre o diâmetro sabendo-se que uma extremidade da corda coincide com uma extremidade do diâmetro.

A figura 1 permitiu-nos também escrever a relação decorrente do teorema 2.

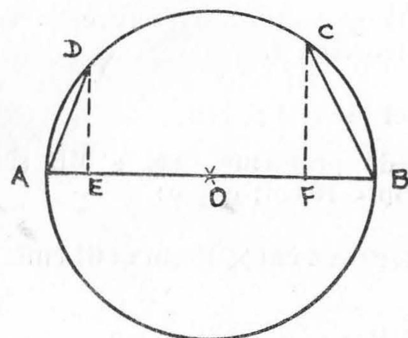
$$PB^2 = AB \times MB$$

No caso do problema, o raio sendo 9 cm, AB valerá 18 cm. Por outro lado, a corda PB sendo igual a 6 cm, podemos escrever:

$$6^2 = 18 \times MB \quad \text{ou}$$

$$MB = \frac{36 \text{ cm}^2}{18 \text{ cm}} = 2 \text{ cm}$$

3) Duas cordas passando pelas extremidades de um diâmetro medem 6 cm e 9 cm. A projeção da primeira sôbre o diâmetro mede 2 cm. Calcular a projeção da outra corda sôbre o diâmetro.



Na figura acima temos:

AD = 6 cm

AE = 2 cm

CB = 9 cm

FB = ?

Como queremos determinar FB, aplicamos o teorema 2 e escrevemos a relação (tirada do lado direito da figura).

$$CB^2 = AB \times FB \quad (1)$$

na qual só conhecemos CB. Por outro lado, a aplicação do mesmo teorema na parte esquerda da figura permite escrever:

$$AD^2 = AB \times AE \quad (2)$$

onde conhecemos AD e AE, permitindo pois, o cálculo de AB. Teremos então:

$$6^2 = AB \times 2 \quad \text{ou} \quad AB = \frac{36 \text{ cm}^2}{2 \text{ cm}} = 18 \text{ cm}$$

Depois disso passamos a conhecer mais um elemento da equação (1) e ficamos em condições de calcular FB. Assim:

$$9^2 = 18 \times FB \quad \text{e} \quad FB = \frac{81}{18} = 4{,}5 \text{ cm}$$

Nota: A figura apresentada podia ser outra, isto é, conter uma das cordas acima do diâmetro e a outra abaixo.

4) Num círculo duas cordas se cortam; os segmentos de um são 4 cm e 6 cm; um dos segmentos da outra vale 3 cm. Qual o valôr do outro segmento?

O teorema 3 permitiu-nos escrever a relação

$$MA \times MB = MC \times MD$$

na qual, por exemplo:

$$MA = 4; \quad MB = 6; \quad MC = 3 \quad \text{e} \quad MB = ?$$

Fazendo-se as substituições, vem:

$$4\text{ cm} \times 6\text{ cm} = 3\text{ cm} \times MD \quad e$$

$$MD = \frac{4\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 8\text{ cm}$$

5) Num círculo duas cordas se cortam; os segmentos de uma são 4 cm e 6 cm. Calcular os segmentos da outra, cujo comprimento total vale 11 cm.
Na relação empregada no exemplo anterior

$$MA \times MB = MC \times MD$$

podemos considerar:

$$MA = 4\text{ cm};\ MB = 6\text{ cm e } MC + MD = 11\text{cm}$$

Então:

$$4 \times 6 = MC \times MD \quad ou$$
$$24 = MC \times MD \quad 1) \ e$$
$$11 = MC + MD \quad (2)$$

As relações (1) e (2) constituem um sistema do 2.° grau, com duas incognitas, que nos permite escrever:

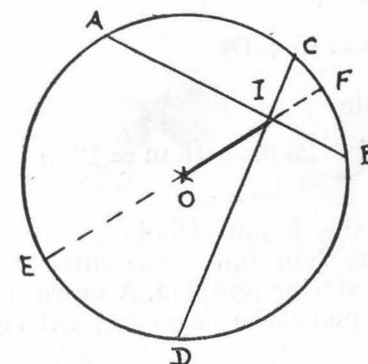
$$MC^2 - 11\,MC + 24 = 0 \quad e$$

$$MC = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2}$$

$$MC = \frac{11 + 5}{2} = 8 \quad e \quad MC = \frac{11 - 5}{2} = 3$$

Os segmentos da segunda corda são pois 8 cm e 3 cm.

6) Num círculo de raio 15 m duas cordas se cortam; o produto dos segmentos de cada corda é 56 m². Calcular a distância do ponto de interseção das duas cordas ao centro do círculo.



O teorema 3 permite escrever:

$$AI \times IB = CI \times ID = IF \times IE$$

Podemos então escrever, uma vez que $EF = 2R = 2 \times 15\text{ m} = 30\text{ m}$ e que $EI = 30\text{ m} - IF$ e queremos calcular OI.

$$56 = IF \times (30 - IF) \quad ou$$
$$IF^2 - 30\,IF + 56 = 0 \quad e$$

$$IF = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 224}}{2} = \frac{30 \pm 26}{2} \quad e$$

$$IF = 28\text{ m} \quad ou \quad IF = 2\text{ m}$$

Pela figura vê-se que o valôr que convém para IF é 2 m, cabendo a EI o valôr 28. Então:

$$EI = EO + OI$$

sendo OI o valôr procurado.

Teremos pois:

$$28 = 15 + OI$$

e finalmente

$$OI = 28\ m - 15\ m = 13\ m$$

7) Duas secantes à um círculo partem de um mesmo ponto; uma tem um comprimento de 3 m, e seu segmento exterior tem 2 m. A outra tem 5 m de comprimento: pede-se o segmento exterior da segunda secante.

O teorema 4 permitiu-nos escrever a relação:

$$MA \times MB = MC \times MD$$

na qual podemos considerar:

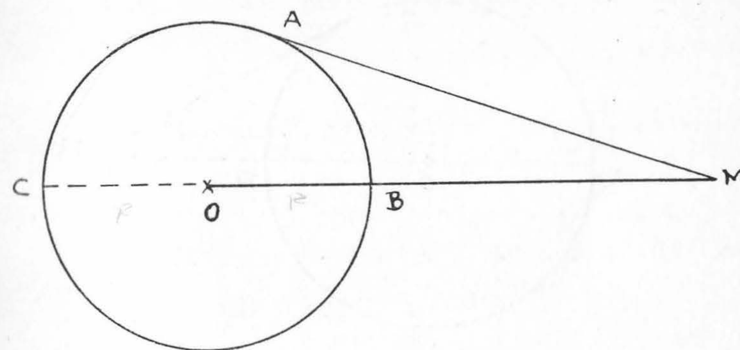
$$MA = 3\ m;\ MB = 2\ m;\ MD = 5\ m \text{ e } MC = ?$$

Teremos então:

$$3\ m \times 2\ m = MC \times 5\ m \quad e$$

$$MC = \frac{3\ m \times 2\ m}{5\ m} = \frac{6\ m^2}{5\ m} = 1{,}20\ m$$

8) Em um círculo de 2 m de raio, uma secante passa pelo centro e sua parte externa tem 5 m; pede-se o comprimento da tangente que termina na extremidade da secante.



O teorema 5 permitiu-nos escrever a relação:

$$MA^2 = MC \times MB$$

na qual podemos considerar

$$MB = 5;\ OB = R = 2;\ BC = 2R = 4 \text{ e } AM = ?$$

Teremos então:

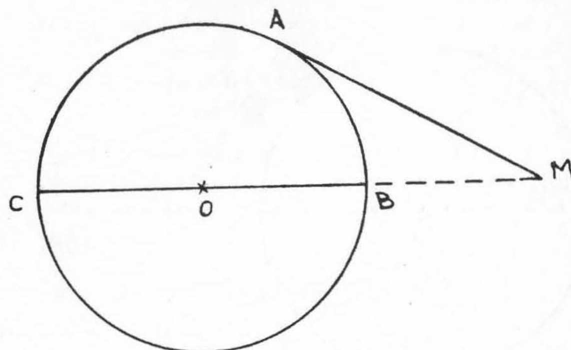
$$MA^2 = (MB + BC) \times MB \quad \text{ou}$$

$$MA^2 = 9 \times 5 = 45$$

$$MA = \sqrt{45} = 6{,}71\ m$$

9) Um círculo tem de diâmetro 6m. De quanto se deve prolongar este diâmetro para que o segmento da tangente traçada desse ponto à circunferência e compreendido entre esse ponto e o ponto de con-

tato tenha comprimento igual ao diâmetro do círculo?



O teorema aplicado no exercício anterior permite escrever:

$$MA^2 = MC \times MB$$

na qual BC = 2R = 6 m; MA = 6 m; MC = BC + + MB e MB = ?

Teremos então:

$$6^2 = (6 + MB) \times MB \quad \text{ou}$$
$$MB^2 + 6\,MB - 36 = 0 \quad \text{e}$$

$$MB = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 144}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{180}}{2} = \frac{-6 \pm 13{,}41}{2}$$

$$MB = \frac{-6 + 13{,}41}{2} = 3{,}70\,m \quad \text{e}$$

$$MB = \frac{-6 - 13{,}41}{2} = -9{,}70\,m,$$

que não serve por ser negativo.

10) De um ponto situado a 5 m do centro de um círculo traça-se uma tangente à circunferência desse círculo tendo 4 m de comprimento. Calcular o raio da circunferência.

Consideremos a figura do exemplo anterior, na qual:

$$MA = 4\,m;\ OM = OB + BM = R + MB = 5 \quad \text{ou}$$
$$MB = 5 - R \quad \text{e} \quad MC = 2R + MB$$

A mesma relação empregada no exemplo 9, nos permite escrever, depois das substituições.

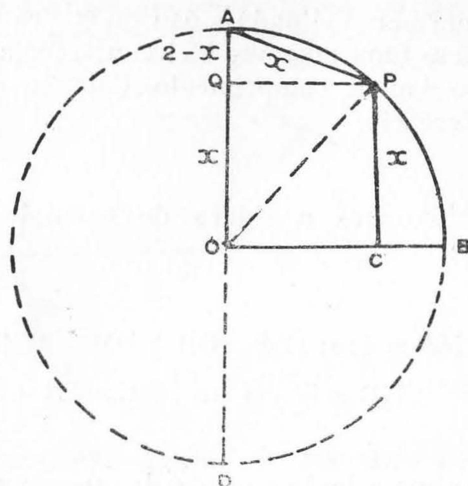
$$4^2 = (2\,R + MB) \times MB$$

depois de considerar o valôr de MB em função de R.

$$16 = (2\,R + 5 - R) \times (5 - R) \quad \text{ou}$$
$$16 = (R + 5)(5 - R) \quad \text{ou}$$
$$16 = 25 - R^2 \quad \text{ou} \quad R^2 = 25 - 16$$

$$R^2 = 9 \quad \text{e} \quad R = \sqrt{9} = 3$$

11) AB é um quadrante de centro O e raio 2 cm; P é um ponto desse quadrante equidistante de A e do raio OB. Calcular a corda PA. (Cel. Edgard de A. Filho. Exercícios de Geometria)



Para facilitar a explicação, o quadrante AOB foi continuado com linhas interrompidas, de modo a completar a circunferência.
O problema diz que a corda AP é igual à ordenada PC e que o raio do quadrante é 2 cm. Verifica-se na figura, que PC é igual a OQ e pelo enunciado do problema conclue-se, que

$$AP = PC = OQ$$

que chamaremos x.
A figura nos mostra que, sendo o raio 2 cm, o segmento $AQ = 2 - x$.
Temos então a corda AP com uma de suas extremidades coincidindo com a do diâmetro AD e a aplicação do teorema 2, nos permite escrever.

$$AP^2 = AD \times AQ \quad \text{ou} \quad x^2 = 4 \times (2 - x) \quad \text{ou}$$

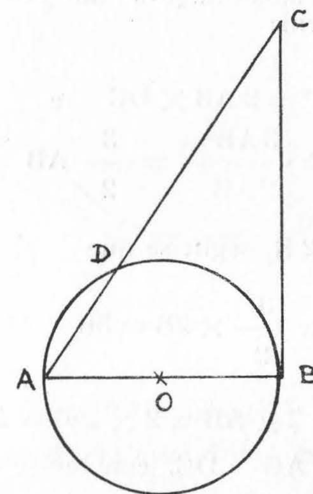
$$x^2 + 4x - 8 = 0$$

que resolvido dá:

$$x = 1{,}67 \text{ cm} \quad \text{e} \quad x = -5{,}67 \text{ cm}$$

Evidentemente o segundo valor não serve, por ser negativo.

12) Tem-se um círculo; traça-se um diâmetro AB e uma tangente a ele, no ponto B. Do ponto A, com um raio igual ao dôbro de AB, descreve-se um arco que corta a tangente em C; traça-se AC que vai cortar o círculo em D. Pede-se o comprimento do segmento AD.



O problema diz que:

$$AC = 2\,AB$$

O teorema 5 nos permite escrever a relação

$$BC^2 = AC \times CD$$

Por outro lado, o triângulo retângulo ABC nos dá:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Como $AC = 2 \times AB$, podemos escrever

$$(2\,AB)^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{ou}$$
$$4\,AB^2 - AB^2 = BC^2$$
$$3\,AB^2 = BC^2$$

Fazendo as substituições na relação tirada do teorema 5, vem:

$$3\,AB^2 = 2\,AB \times DC \quad \text{e}$$

$$DC = \frac{3\,AB^2}{2\,AB} = \frac{3}{2}\,AB$$

Como $AB = 2\,R$, segue-se que

$$DC = \frac{3}{2} \times 2R = 3R$$

Se $AC = 2 \times AB = 2 \times 2\,R = 4R$

Se $AD = AC - DC$, conclue-se que

$$AD = 4R - 3R = R$$

13) Uma corda corta o diâmetro de um círculo segundo um ângulo de 45°; a soma dos quadrados dos segmentos da corda é igual a 98 cm. Calcular o raio do círculo.

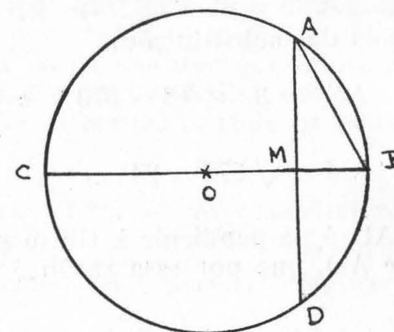
O teorema 6 permitiu-nos escrever a relação

$$MC^2 + MD^2 = 2R^2$$

O problema diz que

$$MC^2 + MD^2 = 98, \quad \text{então}$$
$$98 = 2R^2 \quad \text{e} \quad R^2 = 49 \quad \text{e} \quad R = 7$$

14) Num círculo de 25 cm de raio, uma corda vale 30 cm. Calcular a corda que subtende o arco duplo.



Na figura

$AB = 30$ cm

$CB = 2R = 50$ cm

AD — corda do arco duplo de AB

A relação

$$AB^2 = CB \times MB$$

dá, depois das substituições

$$30^2 = 50 \times MB \quad \text{e} \quad MB = \frac{900}{50} = 18 \text{ cm}$$

Então

$$CM = 50 - MB \quad \text{ou}$$
$$CM = 50 - 18 = 32 \text{ cm}$$

A relação

$$AM^2 = CM \times MB$$

dá depois das substituições

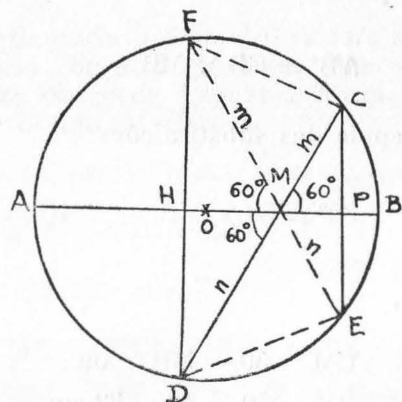
$$AM^2 = 32 \times 18 = 576 \quad \text{e}$$

$$AM = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

Como AD é perpendiculr à CB, o ponto M é a metade de AD, que por essa razão é o dôbro de AM. Então:

$$AD = 2AM \quad \text{ou} \quad AD = 2 \times 24 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$$

15) M é um ponto do diâmetro AB = 16 m de um círculo de centro 0, tal que OM = 6 m e CMD é uma corda formando com AB um ângulo de 60°. Calcular MC e MD. (Ex. de Geometria - Ten. Cel. Edgard de A. Filho)



Na figura acima

AB é o diâmetro igual a 16 m
OM é igual a 6 m, de acôrdo com o problema
CD a corda que fez com o diâmetro AB, um ângulo de 60°
EF uma corda auxiliar que também faz com o diâmetro AB o ângulo EMB = 60°
CE e FD — cordas ligando os extremos das cordas CD e EF.

A figura CEDF é um quadrilátero (trapézio isósceles) inscrito no círculo O.

O teorema 7 nos permite escrever a relação:

$$(m + n)(m + n) = FC \times ED + CE \times FD$$

ou

$$(m + n)^2 = FC \times ED + CE \times FD \qquad (a)$$

O triângulo retângulo CMB tem um ângulo de 60° e em virtude do teorema citado quando tratamos dos triângulos retângulos, CP, lado aposto ao ângulo de 60° é:

$$CP = \frac{m\sqrt{3}}{2}$$

Mas

$$CE = 2\,CP \quad \text{ou} \quad CE = m\sqrt{3}$$

Pela mesma razão

$$FH = DH = \frac{n\sqrt{3}}{2}$$

Mas como

$$FD = 2\,FH, \qquad FD = n\sqrt{3}$$

Os ângulos CMF e DME, opostas pelo vértice, são excêntricos interiores e valem 60º, de vez que CMB = 60º e FMA = 60º.

Mas, vimos anteriormente que:

$$FC = DE \text{ e valem:}$$

$$\text{ângulo FMC} = \frac{\text{arco FC} + \text{arco DE}}{2} \text{ ou } 60 = \frac{2\,FC}{2} \text{ e}$$

$$\text{arco FC} = 60^\circ \quad \text{e} \quad \text{arco DE} = 60^\circ$$

Então, as cordas FC e DE são lados do hexagono regular inscrito no círculo de raio 8, no caso do problema.

Por outro lado o teorema 3 nos permite escrever:

$$AM \times MB = m \times n \quad \text{ou}$$

$$14 \times 2 = mn \quad \text{ou} \quad mn = 28.$$

Fazendo as substituições em (a), vem:

$$(m + n)^2 = 8 \times 8 + m\sqrt{3} \times n\sqrt{3} \quad \text{ou}$$

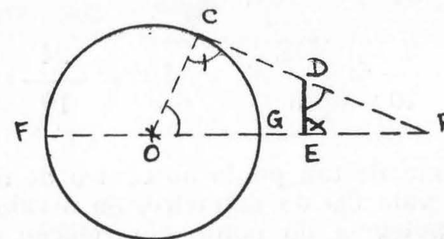
$$m^2 + 2mn + n^2 = 64 + 3\,mn \quad \text{ou}$$

$$m^2 - 28 + n^2 = 64 \quad \text{ou}$$

$$A \begin{cases} m^2 + n^2 = 92 \quad \text{e} \\ mn = 28 \end{cases}$$

O sistema (A) resolvido dá m = 3,08 e n = 9,08

16) Na figura OP = 10 cm; OC = R = 6 cm, CP é tangente à circunferência; D é o ponto médio de CP e DE é perpendicular a OP. Calcular DE.



Na figura tem-se:

$$PE = PO + OF = 10 + 6 = 16$$

$$PG = 4 \; (PO - OG)$$

O teorema 4 permite escrever:

$$PC^2 = PF \times PG \quad \text{ou}$$

$$PC^2 = 16 \times 4 = 64 \quad \text{e} \quad PC = 8$$

O problema diz que o ponto D é o meio de CP então:

$$CD = DP = \frac{8}{2} = 4$$

Os ângulos em C e E são iguais como retos nos triângulos OCP e EDP.

Os ângulos em D e O são iguais porque seus lados são perpendiculares e são ambos agudos como já vimos em outra ocasião.

O primeiro caso de semelhança de triângulos nos diz que os triângulos OCP e EDP são semelhantes porque tem C = E e D = O.

Deles podemos tirar as relações:

$$\frac{DP}{OP} = \frac{DE}{OC} \text{ ou}$$

$$\frac{4}{10} = \frac{DE}{6} \text{ e } DE = \frac{24}{10} = 2{,}4 \text{ cm.}$$

17) A distância de um ponto ao centro de uma circunferência vale 0,9 do diâmetro. Se o raio tiver 1 m, qual a potência do ponto em relação à circunferência.

A potência de um ponto em relação a um círculo é dada por:

$$P = d^2 - R^2$$

No problema

$$d = 0{,}9 \times 2R = 1{,}8R$$

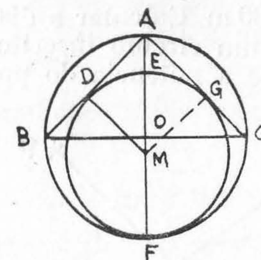
Então:

$$P = (1{,}8\,R)^2 - R^2$$

No caso do raio ser 1 m, vem:

$$P = 1{,}8^2 - 1^2 = 3{,}24 - 1 = 2{,}24$$

19) Um triângulo retângulo isósceles está inscrito em uma circunferência; descreve-se uma circunferência tangente á primeira e aos dois catetos do triângulo retângulo dado. Exprimir o raio dessa circunferência em função do raio da primeira.



Seja $BO = AO = OF = a$ (raios)

$AD = DM = MF = b$ (porque $AD = AG$ e $AG = DM$)

A secante AF e a tangente AD, ao círculo *O*, dão:

$$AE \times AF = AD^2; \quad \text{mas}$$

$AE = 2a - 2b = 2(a - b)$ (diferença entre os diâmetros).

$AF = 2a$ (diâmetro)
$AD = b$

Então:

$$(2a - 2b) \times 2a = b^2 \text{ ou}$$

$$4a^2 - 4ab = b^2 \quad \text{ou} \quad b^2 + 4ab - 4a^2 = 0$$

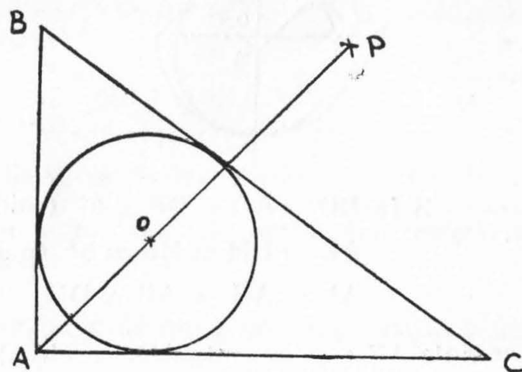
$$b = 2a\,(\sqrt{2} - 1) \text{ e } b = -2a\,(\sqrt{2} + 1)$$

Dos dois valôres de *b* evidentemente só serve

$$b = 2a\,(\sqrt{2} - 1) = 0{,}8284\,a$$

20) A relação entre a altura e a hipotenusa de um triângulo retângulo vem a ser $\frac{60}{13^2}$. O perímetro do

triângulo é 30 m. Calcular a distância a que está um ponto P de um círculo inscrito nesse triângulo, sabendo-se que a potência do ponto é 144.



O problema diz que:

$$\frac{h}{a} = \frac{60}{13^2} \quad (1) \text{ e que}$$

$$a + b + c = 30 \text{ e } b + c = 30 - a \quad (2)$$

Sabemos que

$$ah = bc \quad \text{e} \quad h = \frac{bc}{a} \quad (3)$$

Substituindo na relação (1), h pelo seu valor, tirado de (3), vem:

$$\frac{bc}{a^2} = \frac{60}{13^2} \quad \text{ou}$$

$$13^2bc = 60a^2$$

Sabemos também que

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{ou} \quad a^2 - b^2 - c^2 = 0 \quad (4)$$

Elevando-se $a + b + c = 30$, ao quadrado, vem:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 900 \quad (5)$$

Somando-se membro a membro as igualdades (4) e (5), vem:

$$2(a^2 + ab + ac + bc) = 900 \quad \text{ou}$$

$$2\,[a^2 + a\,(b + c) + bc] = 900 \quad \text{ou}$$

$$a^2 + a\,(b + c) + bc = 450 \quad \text{ou}$$

$$a^2 + a\,(b + c) + \frac{60\,a^2}{13^2} = 450 \quad \text{ou}$$

$$a^2 + a\,(30 - a) + \frac{60\,a^2}{13^2} = 450 \quad \text{ou}$$

$$a^2 + 30\,a - a^2 + \frac{60\,a^2}{13^2} = 450 \quad \text{ou}$$

$$5070\,a + 60\,a^2 = 76050 \quad \text{ou}$$

$$2a^2 + 169\,a - 2535 = 0,$$

que resolvida dá: $a = 13$.

O raio do círculo inscrito é: $r = p - a$

Então:

$$r = 15 - 13 = 2\text{ m}$$

Sabemos que a potência é dada por:

$$\text{Potência} = d^2 - r^2$$

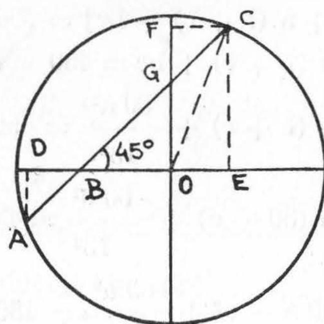
Então:

$$144 = d^2 - 4 \quad \text{e} \quad d^2 = 148 \quad \text{e} \quad d = 12{,}3\text{ m}$$

Como d é a distância do ponto ao centro, segue-se que a distância ao círculo será:

$$d - r \quad \text{ou} \quad 12{,}3 - 2 = 10{,}3 \text{ m}$$

21) Uma corda AC é inclinada sôbre o diâmetro de 45°. Estabelecer a relação que liga os segmentos em que a corda fica dividida e o diâmetro do círculo.



O triângulo ABD é retângulo isósceles; então:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 2\,BD^2 \qquad (AD = BD)$$

Por outro lado o triângulo GFC é retângulo isósceles também; é congruente ao triângulo ADB e consequentemente FC = DB.
Então:

$$AB^2 = 2\,BD^2 = 2\,FC^2 \qquad (1)$$

O triângulo BCE é também retângulo isósceles e dá:

$$BC^2 = 2\,CE^2 \qquad (2)$$

Somando membro a membro as igualdades (1) e (2) vem:

$$AB^2 + BC^2 = 2\,CF^2 + 2\,CE^2 = 2\,(CF^2 + CE^2)$$

O triângulo retângulo OEC nos dá:

$$OC^2 = OE^2 + CE^2 \qquad (3)$$

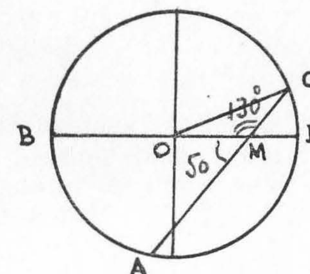
Considerando que

$$OE = CF, \text{ vem:}$$
$$AB^2 + BC^2 = 2\,(OE^2 + CE^2)$$

Vemos que a quantidade contida no parêntesis é o segundo membro da relação (3); então

$$AB^2 + BC^2 = 2OC^2 = 2r^2 \quad (OC = r)$$

.1) Num círculo de raio igual a 12 cm, uma corda corta o diâmetro, num ponto afastado 5 cm do centro do círculo e fazendo um ângulo de 50°. Calcular os segmentos da corda, determinados pelo diâmetro.



Na figura, AC é a corda que intercepta o diâmetro BD fazendo com êle um ângulo de 50°. Portanto os ângulos CMD e BMA, valem 50°. Como consequência, o ângulo OMC é igual a 130°.

O triângulo OMC é obtusângulo e dêle podemos tirar a relação:

$$OC^2 = OM^2 + MC^2 - 2OM \cdot MC \cdot \cos OMC$$

Substituindo na relação acima os dados do problema, vem:

$$12^2 = 5^2 + MC^2 - 2 \times 5 \times MC \times \cos 130^\circ: \quad \text{ou}$$

$$144 = 25 + MC^2 - 10 \times MC \times 0{,}643 \quad \text{ou}$$

$$MC^2 + 6{,}43\, MC - 119 = 0 \quad \text{e} \quad MC = 8{,}15 \text{ cm}$$

Por outro lado

$$MB \times MD = MA \times MC \quad \text{ou}$$

$$17 \times 7 = MA \times 8{,}15 \quad \text{ou}$$

$$119 = 8{,}15\, MA \quad \text{e} \quad MA = 14{,}6$$

EXERCÍCIOS À RESOLVER

1) Calcular a ordenada de um ponto da circunferência, sabendo que a mesma determina no diâmetro que lhe é perpendicular, segmentos de 0,3 m e 7,5 m.

RESP.: 1,5 m

2) Em um círculo de 12 cm de raio traça-se pela extremidade de um diâmetro uma corda igual ao raio. Calcular a projeção da corda sôbre o diâmetro referido.

RESP.: 6 cm

3) Pelas extremidades de um diâmetro traçam-se duas cordas de 5 cm e 7 cm respectivamente. A projeção da primeira sôbre o diâmetro mede 3 m. Calcular a projeção da segunda corda.

RESP.: 5,88 m

4) Num círculo o diâmetro AB vale 5 m. A projeção da corda AC sôbre o diâmetro vale 1,8 m. Calcular a corda BC.

(I.E. — 1953) RESP.: 3 m

5) Num círculo duas cordas se cortam. Os segmentos de uma medem 12 m e 6 m respectivamente; um dos segmentos da outra vale 9 m. Qual o valor do outro segmento?

RESP.: 8 m.

6) Num círculo duas cordas se cortam; os segmentos de uma são 12 m e 6 m. Calcular os segmentos da outra, cujo comprimento total vale 17 m.

RESP.: 8 m e 9 m.

7) Num círculo duas cordas se cortam. O produto dos segmentos de cada corda é 56 m² e a distância do ponto de interseção ao centro, 13 m. Calcular o raio.

RESP.: 15 m

8) Num círculo de 1 m de raio, determinar a distância do centro a uma corda de 1,6 m.

RESP.: 0,6 m

9) Duas secantes são traçadas do mesmo ponto exterior. Calcular uma das secantes e sua parte externa, cuja parte interna tem 9 m, sabendo que a outra secante mede 9 m e sua parte externa 4 m.

RESP.: 12 m e 3 m

10) Num círculo de 12 m de raio, duas cordas se cortam; o produto dos segmentos de cada uma é 44 m². Calcular a distância do ponto de interseção ao centro

RESP.: 10 m

11) De um ponto situado a 10 m do centro de um círculo de 8 m de raio, traça-se uma secante tal que a parte interna seja igual a parte externa. Calcular essa secante.

RESP.: 8,46 m

12) A que distância de uma circunferência de 6 cm de raio deve estar um ponto para que o segmento total da secante traçada desse ponto e passando pelo centro, seja igual ao dôbro da tangente, traçada do mesmo ponto?

RESP.: 4 cm

13) Uma tangente a um círculo e uma secante partem do mesmo ponto; a tangente mede 18 m e a parte interna da secante 27 m. Calcular a parte externa da secante.

RESP.: 9 m

14) De um ponto P situado a uma distância igual a 2R do centro de um círculo de raio R, partem duas tangentes PA e PB. Calcular as tangentes PA e PB, o ângulo APB e a corda de contato AB.

RESP.: $R\sqrt{3}$; 60°; $R\sqrt{3}$

15) Num círculo de raio 5 m traçam-se pelas extremidades de um diâmetro uma tangente e uma corda de 8 m, que intercepta a tangente. Determinar a tangente e o prolongamento da corda.

RESP.: 7,5 m e 4,5 m

16) Uma corda corta o diâmetro de um círculo, segundo um ângulo de 45°; a soma dos quadrados dos segmentos da corda é igual a 288 m. Calcular o raio do círculo.

RESP.: 12 m.

17) Num círculo de raio igual a 5 cm, uma corda corta um diâmetro formando um ângulo de 45°. O comprimento total da corda é 8 cm. Calcular os dois segmentos que o diâmetro considerado determina na mesma corda.

RESP.: 7 cm e 1 cm

18) Num círculo de raio 25 cm, uma corda vale 30 cm. Calcular a corda que subtende a metade do arco.

RESP.: 15,8 cm

19) A flexa de uma corda de um círculo de 312 cm de raio, mede ~~24 m~~ cm. Calcular a corda.

RESP.: 240 cm

20) M é um ponto do diâmetro AB = 16 m de um círculo de centro *O*, tal que OM = 6 m e CMD é uma corda formando com AB um ângulo de 30°. Calcular MC e MD.

RESP.: 2,22 m e 12,61 m

21) A e B são pontos do lado OY de um ângulo XOY = 30° tais que OA = 4 m e OB = 9 m. Pelos pontos A e B passa um círculo tangente ao lado OX em C. Calcular: o segmento OC; a distância do ponto C ao lado OY; o perímetro do triângulo ABC.

RESP.: 6 m; 3 m; 13,07 m

22) Num círculo de 18 m de raio uma corda mede 12 m. Calcular a flexa da corda do arco duplo.

RESP.: 4 m

23) Num círculo uma corda mede 12 m; a corda subtendida pelo arco duplo mede 23,6 m. Calcular o raio do círculo.

RESP.: 33,02 m

24) Num círculo de centro *O* traça-se uma tangente PT = 9 cm; pelo ponto P, extremidade da tangente, traça-se uma secante passando pelo centro do círculo, cuja parte externa vale 3 cm. Calcular o raio do círculo.

(E.N.C. Dutra — 1951) RESP.: 12 cm

25) Num círculo de centro O e raio R os diâmetros AB e CD são ortogonais. Prolonga-se AB de um segmento BP igual ao raio. Exprimir, em função de R o segmento determinado por P e pela interseção de PC com o círculo de centro O.

(E.N.C. Dutra — 1951) RESP.: $\frac{3R\sqrt{5}}{5}$

26) De um ponto P, fora de um círculo, traçam-se uma tangente PA, ao círculo, e uma secante. O segmento externo da secante mede 4 m e o interno é igual a PA. Calcule o comprimento de PA.

(I.E. — 1952) RESP.: 6,46 dm

27) Uma tangente a um círculo e uma secante, partem do mesmo ponto; a tangente mede 4 m e a secante 8 metros. Calcular a parte externa da secante.

(C. Naval — 1951) RESP.: 2 m

28) De um ponto situado a 100 dm do centro de um círculo de 6 m de raio, traça-se uma tangente a esse círculo. Qual o comprimento desta tangente?

(C. Naval — 1952) RESP.: 8 m

29) Num círculo de raio igual a 5 cm traça-se uma corda AB = 5 cm e outra BC = 6 cm. Calcular a corda AC.

RESP.: 9,2 cm

30) O raio de um círculo mede 6 m. Por um ponto P, distante 10 m do centro, traçam-se duas tangentes. Calcular o comprimento das tangentes, compreendido entre P e os pontos de contato; calcular, também, a corda que une os pontos de contato.

RESP.: 8 m e 9,6 m

31) De um ponto de potência 64 em relação a uma circunferência, traçou-se uma tangente à mesma circunferência. Calcular o comprimento da tangente.

RESP.: 8

32) No meio de um segmento AB (de 12 cm) eleva-se uma perpendicular (de 2 cm) e faz-se passar uma circunferência pelas extremidades da perpendicular e do segmento. Calcular o raio da circunferência.

C. Naval — 1952 RESP.: 10 m

33) Calcular a potência de um ponto em relação a uma circunferência de 6 cm de diâmetro, sendo 7 cm a distância do ponto ao centro.

RESP.: 40

34) De um ponto de potência 64 em relação a uma circunferência traça-se uma tangente à mesma circunferência. Calcular o comprimento da tangente.

RESP.: 8

35) Calcular a distância de um ponto exterior ao centro de uma circunferência de 10 cm de diâmetro sabendo que a potência do mesmo ponto é igual a 24.

RESP.: 7 cm

36) Num círculo duas cordas se cortam. O produto dos segmentos de cada corda é 56 m² e a distância do ponto de interseção ao centro 13 m. Calcular o raio.

RESP.: 15 m

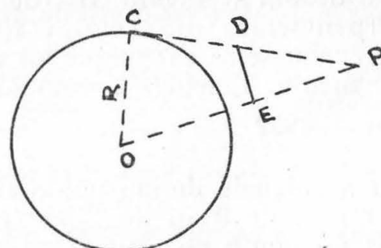
37) Demonstre o teorema: "Quando duas secantes se cortam fora do círculo, o produto dos dois segmentos de uma a partir do ponto de interseção é igual ao produto dos dois segmentos da outra".

I.E. — 1955

38) Demonstrar o teorema: Quando duas cordas se cortam no interior de um círculo, o produto dos dois segmentos de uma é igual ao produto dos dois segmentos da outra.

E.N.C. Dutra — 1955

39) Na figura, $OP = 5$ cm, $OC = R = 3$ cm, CP é tangente à circunferência, D é o ponto médio de CP e DE é perpendicular a OP. Calcule DE.



C. Naval — 1960 RESP.: 1,2 cm

POLÍGONOS INSCRITÍVEIS E CIRCUNSCRITÍVEIS. TEOREMA FUNDAMENTAL; TEOREMA DE HIPARCO; TEOREMA DE PITOT.

Polígono inscrito na circunferência é aquele que tem os vértices sôbre a circunferência. Seus lados são cordas do círculo.

Polígono circunscrito à circunferência é aquêle cujos lados são tangentes à circunferência.

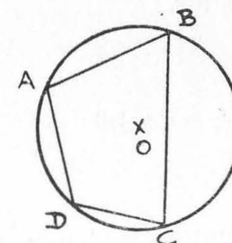
No primeiro caso *a circunferência é circunscrita* ao polígono; no segundo caso a *circunferência é inscrita* no polígono.

O triângulo, polígono de menor número de lados, *pode sempre* ser inscrito ou circunscrito em um círculo.

Para que um quadrilátero convexo seja inscritível:

Teorema 1

Em todo quadrilátero convexo inscrito, os ângulos apostos são suplementares.



Na figura 1

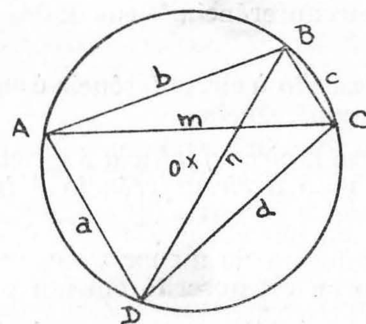
ABCD — quadrilátero convexo inscrito no círculo O.
A, B, C e D — vértices sôbre a circunferência.
AB, BC, CD e AD — lados do polígono; cordas do círculo.

Relação

$$\left(\text{ângulos}\right) A + C = 180^\circ; \quad B + D = 180^\circ$$

Teorema 2 (Hiparco e Ptolomeu)

Em todo quadrilátero inscrito o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.



Na figura 2

ABCD — quadrilátero convexo inscrito.
AB, BC, CD e AD — lados.
AC e BD — diagonais.

Relação:

$$m . n = ac + bd$$

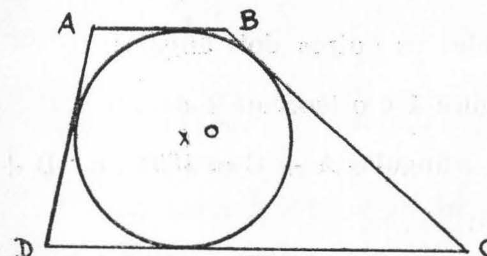
Teorema 3

Do mesmo quadrilátero podemos escrever a relação:

$$\frac{m}{n} = \frac{ab + ad}{bc + ad}$$

Teorema 4 (Pitot)

Em todo quadrilátero circunscrito a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.



Na figura 3.

ABCD — quadrilátero circunscrito ao círculo O.

AB, BC, CD e AD — lados do quadrilátero, tangentes ao círculo.

Relação:

$$AB + DC = AD + BC.$$

1) O quadrilátero ABCD está inscrito num círculo. Os ângulos A e B medem respectivamente 68° e 108°.

Calcular os outros dois ângulos.

A figura 1 e o teorema 1 dão:

$$\text{ângulos } A + C = 180^\circ \quad e \quad B + D = 180^\circ$$

então:

$$68^\circ + C = 180^\circ \quad e \quad 108^\circ + D = 180^\circ \quad e$$

$$C = 112^\circ \quad e \quad D = 72^\circ$$

2) Um trapézio isósceles está circunscrito a um círculo. As bases medem respectivamente 5 m e 10 m. Calcular o comprimento dos lados não paralelos.

A figura 3 e o teorema 4 fornecem-nos a relação.

$$AB + DC = AD + BC$$

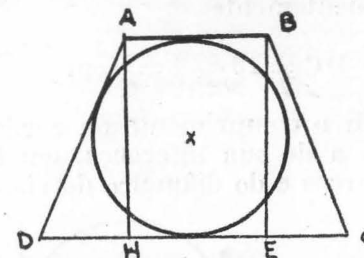
No caso do problema, o quadrilátero circunscrito é um trapézio isósceles, por isso os lados AD e BC são iguais. Então:

$$5\text{ m} + 10\text{ m} = 2AD = 2BC$$

$$15 = 2AD = 2BC \quad \text{Então}$$

$$AD = BC = 7{,}5\text{ m}$$

3) Calcular as bases de um trapézio isósceles circunscrito a um círculo de diâmetro 6 cm, sabendo que a base média mede 6,5 cm.



A base média sendo 6,5 cm, quer dizer que

$$AB + CD = 2 \times 6{,}5 = 13\text{ cm}$$

O teorema de Pitot diz que

$$AB + CD = AD + BC \quad \text{ou}$$

$$13\text{ cm} = AD + BC.$$

Como o trapézio é isósceles $AD = BC$

Então:

$$AD = BC = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

O triângulo retângulo ADH, dá:

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 \quad \text{ou}$$

$$DH^2 = AD^2 - AH^2 \quad \text{ou}$$

$$DH^2 = 6{,}5^2 - 6^2 = 6{,}25$$

$$DH = 2{,}5 \quad e \quad DH = EC$$

Mas

$$AB + DC = AB + DH + HE + EC = 13$$

$$AB = HE \quad \text{então}$$

$$AB + 2{,}5 + AB + 2{,}5 = 13$$

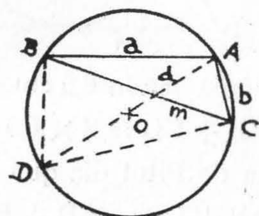
$$2AB = 13 - 5 = 8\text{ cm}$$

$$AB = 4\text{ cm}$$

Conseqüentemente

$$DC = 13 - 4 = 9 \text{ cm}$$

4) Exprimir o comprimento da corda da soma de dois arcos e a de sua diferença, em função das cordas desses arcos e do diâmetro do círculo.



Na figura a e b são as duas cordas dadas; d, o diâmetro; m a corda da soma. O teorema 2 permite-nos escrever:

$$m.d = a.DC + b.DB$$

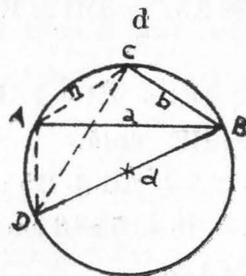
Os triângulos ADB e ADC são retângulos e nos dão:

$$BD = \sqrt{d^2 - a^2} \quad e \quad DC = \sqrt{d^2 - b^2}$$

Teremos então:

$$m.d = a\sqrt{d^2 - b^2} + b\sqrt{d^2 - a^2} \quad e$$

$$m = \frac{a\sqrt{d^2 - b^2} + b\sqrt{d^2 - a^2}}{d}$$



Na figura, a e b são as duas cordas dadas. d é o diâmetro e n a corda da diferença. O teorema 2 permite-nos escrever:

$$nd + bAD = aCD$$

Os triângulos retângulos ABD e DCB nos dão:

$$AD = \sqrt{d^2 - a^2} \quad e \quad CD = \sqrt{d^2 - b^2}$$

Teremos então:

$$n.d + b\sqrt{d^2 - a^2} = a\sqrt{d^2 - b^2} \quad e$$

$$n = \frac{a\sqrt{d^2 - b^2} - b\sqrt{d^2 - a^2}}{d}$$

5) Achar a corda do dôbro de um arco, conhecendo a corda desse arco e o raio do círculo.

No problema 4 (1.ª parte), fazendo $a = b$, a corda m seria a corda do arco duplo e então teremos:

$$m = \frac{2a\sqrt{d^2 - a}}{d}$$

Na figura são dados: raio = 5 cm; AB = 3 cm e AB = 3 cm e BC = 6 cm. Calcular a corda AC.

Completemos a figura: (figura b)

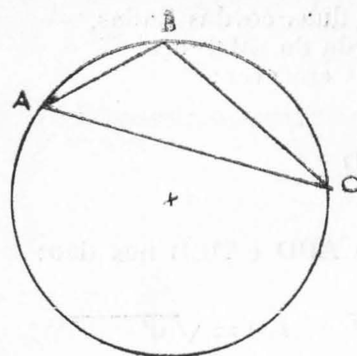


fig. a

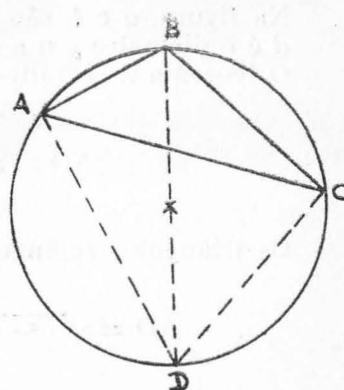


fig. b

O teorema 2 permite escrever:

$$AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$$

Na relação acima não conhecemos AD e CD, que calcularemos por meio dos triângulos retângulos BAD e BCD.

Assim:

triângulo ABD		triângulo BDC
$BD^2 = AB^2 + AD^2$	ou	$BD^2 = BC^2 + CD^2$
$10^2 = 3^2 + AD^2$		$10^2 = 6^2 + CD^2$
$AD^2 = 100 - 9 = 91$		$CD^2 = 100 - 36 = 64$
$AD = \sqrt{91} = 9{,}5$ cm		$CD = \sqrt{64} = 8$

Substituindo-se agora os valôres de AD e CD na relação do teorema 2, vem:

$$9{,}5 \times 6 + 3 \times 8 = AC \times 10$$

$$57{,}0 + 24 = 10\ AC$$

$$81 = 10\ AC \quad e \quad AC = \frac{81}{10} = 8{,}1$$

7) Achar as diagonais de um quadrilátero inscrito, conhecendo os quatro lados.

A figura 2 permitiu-nos escrever as relações:

$$m.n = a.c + bd \quad (1) \quad e$$

$$\frac{m}{n} = \frac{a.b + cd}{ad + bc} \quad (2)$$

Multiplicando-se as igualdades 1 e 2, vem:

$$m^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$$

Dividindo-se a igualdade (1) pela igualdade (2), vem:

$$n^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

que são os quadrados das diagonais procuradas.

8) Dois lados opostos de um quadrilátero inscrito medem 7,5 m e 12 m. As diagonais 10 m e 12,5 m. Calcular os outros dois lados do quadrilátero.

Os teoremas 2 e 3, permitem escrever:

$$mn = ac + bd \quad (1) \quad e$$

$$\frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc} \quad (2)$$

A primeira relação dá:

$$12{,}5 \times 10 = ac + 7{,}5 \times 12 \quad ou$$

$$ac = 125 - 90 = 35$$

A segunda relação dá:

$$\frac{12,5}{10} = \frac{7,5\ a + 12\ c}{12\ a + 7,5\ c}$$

$$\frac{2,5}{2} = \frac{7,5\ a + 12\ c}{12\ a + 7,5\ c} \quad \text{ou}$$

$$30\ a + 18,75\ c = 15\ a + 24\ c \quad \text{ou}$$

$$15\ a = 5,25\ c \quad \text{e}$$

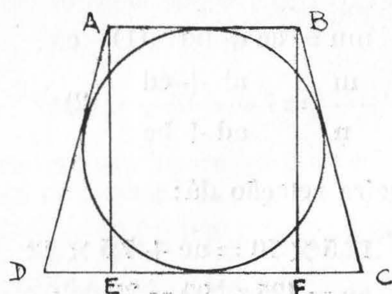
$$\frac{a}{c} = \frac{5,25}{15} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{c} = \frac{1,05}{3}$$

$$\frac{a^2}{ac} = \frac{1,05}{3} \quad \text{ou}$$

$$a = 3,5\ m$$

$$c = 35 \div 3,5 = 10\ m$$

9) Um trapézio isósceles está circunscrito a um circulo de raio igual a 3 dm. Os ângulos adjacentes à base maior do trapézio medem 67°. A base menor tem 4 dm. Calcular os lados não paralelos e a base maior.



O problema diz que os ângulos C e D valem 67°. Os triângulos ADE e BCF são retângulos AE = BF = = 2 R = 2 × 3 = 6 dm.

Como vimos em outra ocasião:

$$AE = AD \text{ sen } D \quad \text{e}$$

$$6 = AD \text{ sen } 67^\circ \quad \text{ou}$$

$$6 = AD \times 0,9205 \quad \text{e}$$

$$AD = \frac{6}{0,9205} = 6,51\ dm$$

como o trapézio é isósceles

$$AD = BC = 6,51\ dm$$

Podemos também escrever:

$$DE = AD \cos D \quad \text{ou}$$

$$DE = AD \cos 67^\circ$$

$$DE = 6,51 \times 0,3907 = 2,543$$

Os triângulos ADE e BFC sendo iguais DE = FC

Por outro lado EF = AB

Então

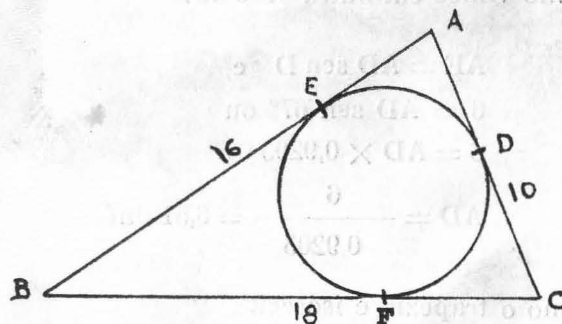
$$DC = DE + AB + FC \quad \text{ou}$$

$$DC = DE + AB + DE \quad \text{ou}$$

$$DC = 2DE + AB \quad \text{ou}$$

$$DC = 2 \times 2,543 + 4 = 5,096 + 4 = 9,086\ dm$$

10) Um círculo está inscrito num triângulo, cujos lados teem respectivamente, 10 cm, 16 cm e 18 cm. Calcular as distâncias dos vértices do triângulo aos pontos de contato.



As tangentes traçadas de um ponto à uma circunferência são iguais. Então:

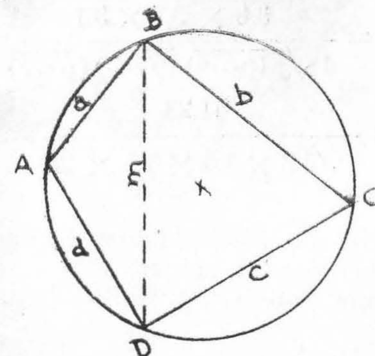
$$AE = AD; \quad BE = BF \quad e \quad CD = CF$$

Por outro lado

$$AD + DC = 10 \quad (1)$$
$$AE + EB = AD + EB = 16 \quad (2)$$
$$BF + FC = EB + DC = 18 \quad (3)$$

As equações (1), (2) e (3) formam um sistema, que resolvido dá: 4 cm, 6 cm e 12 cm, que são as respostas pedidas.

11) Um quadrilátero inscrito tem para lados 2 cm; 3,5 cm; 3,1 cm e 2,6 cm. Calcular o raio do círculo circunscrito ao quadrilátero.



A diagonal m decompõe o quadrilátero em dois triângulos e o círculo circunscrito ao triângulo BCD será circunscrito ao quadrilátero.
Calcularemos pois a diagonal m. Sabemos que:

$$m^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} =$$

$$= \frac{(2\times3{,}1+3{,}5\times2{,}6)\,(2\times3{,}5+3{,}1\times2{,}6)}{2\times2{,}6 + 3{,}5\times3{,}1} =$$

$$= \frac{230{,}418}{16{,}05} = 14{,}3562 \text{ cm}^2$$

$$m = \sqrt{14{,}3562 \text{ cm}^2} = 3{,}78 \text{ cm} \quad \text{ou} \quad 3{,}8 \text{ cm}$$

O raio do círculo, circunscrito ao triângulo é:

$$R = \frac{abc}{4S},$$

que no caso será

$$R = \frac{bcm}{4S} \quad \text{ou}$$

$$R = \frac{3,8 \times 3,5 \times 3,1}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} =$$

$$= \frac{41,23}{4\sqrt{5,2 \times 1,4 \times 1,7 \times 2,1}} = \frac{41,23}{4,89} = 2$$

EXERCÍCIOS À RESOLVER

1) O quadrilátero ABCD está inscrito num círculo. Os ângulos A e B medem 120° e 80° respectivamente. Calcular os ângulos C e D.

RESP.: 60° e 100°

2) Um trapézio isósceles está circunscrito a um círculo. As bases medem respectivamente 4 m e 8 m. Calcular o comprimento dos lados não paralelos.

RESP.: 6 m

3) Um trapézio isósceles está circunscrito a um círculo. Um dos lados não paralelos mede 4 m e a base maior 5 m. Calcular a base menor.

RESP.: 3 m

4) Calcular as bases de um trapézio isósceles circunscrito a um círculo de ~~raio~~ diâmetro igual a $\sqrt{21}$ cm, sabendo que a base média vale 5 cm.

RESP.: 3 cm e 7 cm

ok

* 5) Calcule a base menor de um trapézio isósceles de perímetro 10 cm, circunscrito a uma circunferência de 2 cm de diâmetro.

C. Naval — 1960 RESP.: 1 cm

ok

* 6) As cordas correspondentes a dois arcos de um círculo de raio 5 m, valem 4 m e 6 m. Calcular os comprimentos das cordas do arco soma e do arco diferença.

RESP.: 8,66 m e 2,26 m

Vilar
Apost. 2ª pg 19
probl. 31 e 32

7) Os lados de um quadrilátero inscrito num círculo são:
AB = 12 m; BC = 9 m; CD = 2,5 m e AD = 10,9 m

Calcular as diagonais.

RESP.: 12,04 m e 10,62 m

8) Em um quadrilátero inscrito, tem-se os lados respectivamente iguais a 3 m; 4 m, 8 m e 6 m. Sabendo-se que uma das diagonais vale 8 m, calcular a outra.

C. Naval — 1959 RESP.: 6 m

9) Dois lados opostos de um quadrilátero inscrito valem 45 cm e 72 cm. As diagonais medem 60 cm e 75 cm. Calcular os outros dois lados.

RESP.: 21 cm e 60 cm

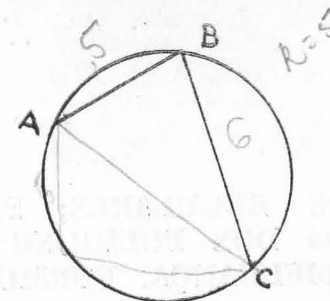
10) No problema 7, calcular o raio do círculo circunscrito ao quadrilátero.

RESP.: 7,5 m

11) Calcular a corda da metade de um arco conhecendo a corda C deste arco e o raio do círculo.

RESP.: $a = \sqrt{\dfrac{d^2}{2} - \dfrac{d}{2}\sqrt{d^2 - c^2}}$

13) Na figura abaixo são dados:
Raio = 5 cm; AB = 5 cm; BC = 6 cm. Calcular a corda AC.



C. Naval — 1959 RESP.: $4 + 3\sqrt{3}$

14) A corda de um arco de 21° num círculo de raio 8m, vale 1 m. Calcular a corda de 63°, desse círculo.

RESP.: 2,95 m

15) Um trapézio isósceles está circunscrito a um círculo de raio 6 dm. Os ângulos adjacentes à base maior do trapézio medem 70°. A base menor tem 8 dm. Calcular a base maior e os lados não paralelos.

RESP.: 14 dm e 12,34 dm

16) Os lados de um triângulo medem respectivamente 14 cm; 18 cm e 22 cm. Calcular as distâncias dos vértices do triângulo aos pontos de contacto dos lados com a circunferência do círculo inscrito.

C. Naval — 1959 RESP.: 5 cm; 9 cm e 13 cm

OBSERVAÇÃO — O exercício 10 só deve ser feito depois do estudo das áreas.

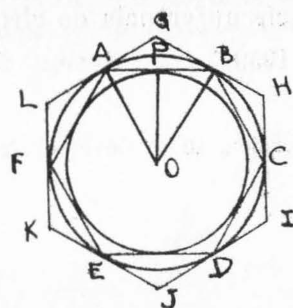
POLÍGONOS REGULARES; PROPRIEDADES; ELEMENTOS DOS POLÍGONOS REGULARES. SEMELHANÇA. FORMULÁRIO.

Como já dissemos em outro local, *polígono regular* é aquele que tem todos os lados iguais e todos os ângulos também iguais.

Da classificação dos polígonos, dada anteriormente, só estudaremos os *polígonos convexos*.

Teorema 1

Quando dividimos uma circunferência em n partes iguais e traçamos as cordas que ligam consecutivamente os pontos de divisão, formamos um polígono regular inscrito de n lados; se traçarmos pelos pontos de divisão tangentes à circunferência ficará formado um polígono regular circunscrito de n lados.



No caso da figura o polígono ABCDEF é inscrito no círculo de centro. O e o polígono GHIJKL, é circunscrito ao círculo de centro O. Ambos têm 6 lados; são portanto dois hexágonos.

Recíproca

Todo polígono *regular* é inscritível e circunscritível.

ELEMENTOS DOS POLÍGONOS REGULARES

Centro de um polígono regular é o centro da circunferência circunscrita e também da inscrita, representado em O, na figura.

Raio do polígono regular é o raio da circunferência circunscrita ao polígono; na figura, OA.

Ângulo cêntrico do polígono regular é o ângulo formado por dois raios traçados de dois vértices consecutivos; na figura o ângulo AOB, por exemplo. Tem para valôr o quociente da divisão $\frac{360°}{n}$

Sendo n o número de lados do polígono e 360° o número de graus da circunferência.

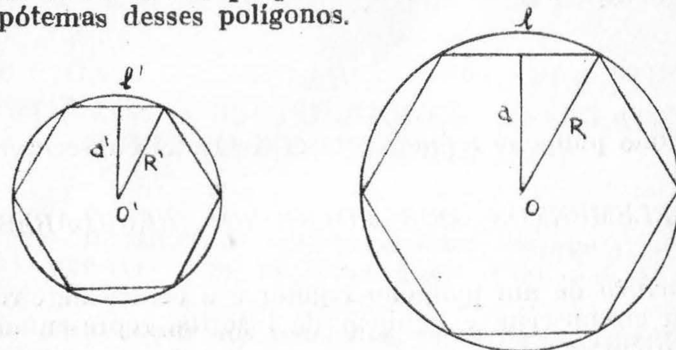
Apótema é o comprimento da perpendicular baixada do centro do polígono sôbre um dos lados (meio do lado); na figura, OP; ele é igual ao raio do círculo inscrito no mesmo polígono.

Teorema 2

Dois polígonos regulares convexos do mesmo número de lados são semelhantes.

Teorema 3

Os perímetros de dois polígonos regulares do mesmo número de lados são proporcionais aos lados, aos raios ou aos apótemas desses polígonos.



Relação

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{R}{R'} = \frac{a}{a'} = \frac{l}{l'}$$

2p e 2p' sendo os perímetros dos dois polígonos semelhantes.

Depois do que ficou dito, concluimos que os polígonos de um mesmo número de lados, inscrito e circunscrito à um círculo são semelhantes.

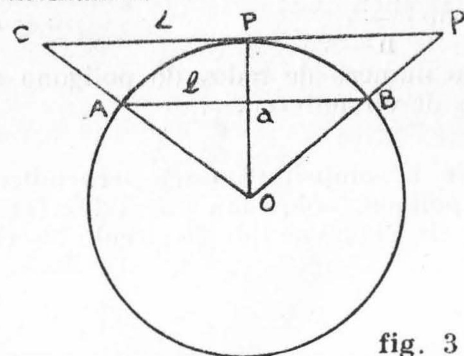


fig. 3

Na figura 3

AB — lado do polígono inscrito (l)

CD — lado do polígono circunscrito do mesmo n.° de lados (L; semelhante)

OP — raio do círculo circunscrito ao polígono de lado AB e inscrito ao polígono de lado CD. (R)

AQ — apótema do polígono inscrito do lado AB (a)

Relação

$$\frac{L}{l} = \frac{R}{a}$$

Teorema 4

Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes e semelhantemente dispostos.

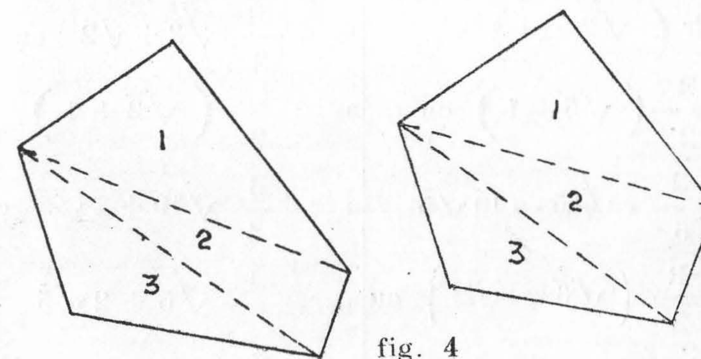


fig. 4

Na figura 4

Dois polígonos semelhantes **decompostos em 3 triângulos cada um.**

Os triângulos 1 são semelhantes bem como os **2 e 3 e estão semelhantemente dispostos.**

Lado dos polígonos regulares	*Apotema dos polígonos regulares*
$l_3 = R\sqrt{3}$ ou $l_3 = 2r\sqrt{3}$	$a_3 = \frac{R}{2}$ ou $a_3 = \frac{1\sqrt{3}}{2}$
$l_4 = R\sqrt{2}$ ou $l_4 = 2r$	$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ ou $a_4 = \frac{1}{2}$
$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ ou	$a_5 = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right)$ ou
$l_5 = 2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	$a_5 = \frac{1}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$
$l_6 = R$ ou $l_6 = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$	$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ ou $a_6 = \frac{1\sqrt{3}}{2}$
$l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ou	$a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ou
$l_8 = 2r\left(\sqrt{2} - 1\right)$	$a_8 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)$
$l_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ ou	$a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ ou
$l_{10} = \frac{2}{5} r\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$	$a_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$
$l_{12} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ ou	$a_{12} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$ ou
$l_{12} = 2r\left(2 - \sqrt{3}\right.$	$a_{12} = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{3}\right)$
$l_n = 2R\,\text{sen}\,\frac{180^\circ}{n}$	$a_n = \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}$
$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$	$a_n = R\cos\frac{180}{n}$
$L = \frac{2Rl}{\sqrt{4R^2 - l^2}}$	

Nas fórmulas constantes do quadro

R é o raio do círculo circunscrito
r é o raio do círculo inscrito

l_n e a_n representam o lado e o apotema de um polígono qualquer, l_{2n} é o lado de um polígono de número duplo de lados em função do lado do polígono de *n* lados.

L e l lados dos polígonos circunscritos e inscrito no mesmo círculo, respectivamente.

O lado do pentágono regular inscrito (l_5) é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são o raio do círculo e o lado do decágono regular inscrito.

O lado do decágono regular inscrito é igual ao maior segmento do raio dividido em média e extrema razão. É o segmento aureo do raio

$$l_{10} = 0{,}618\,R$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Qual o valor do ângulo cêntrico do octógono?

$$\text{ângulo cêntrico} = \frac{360}{n}$$

$$\text{ângulo cêntrico} = \frac{360}{8} = 45^\circ$$

2) Dois polígonos regulares convexos têm, respectivamente n e n + 1 lados. Determinar êsses polígonos, sabendo-se que a diferença entre os seus ângulos cêntricos é de 12°.

Podemos escrever

$$\frac{360}{n} - \frac{360}{n+1} = 12 \quad \text{ou}$$

$$360(n+1) - 360n = 12n(n+1)$$
$$360n + 360 - 360n = 12n^2 + 12n$$
$$12n^2 + 12n - 360 = 0 \text{ an}$$
$$n^2 + n - 30 = 0$$

e resolvendo a equação:

$$n = 5 \text{ e } n + 1 = 6$$

Os polígonos são pois o pentágono e o hexágono.

3) Calcular lado do triângulo equilátero circunscrito em um círculo de raio 30 cm.

Temos (formulário)

$$l_3 = 2r\sqrt{3} \text{ ; então}$$
$$l_3 = 2 \times 30 \times 1{,}73 = 103{,}8 \text{ cm}$$

4) Calcular o *apotema* do decágono inscrito num círculo de 5 cm de raio.

Temos:

$$a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \text{ ; então}$$

$$a_{10} \frac{5}{4} \times 3{,}8 = 4{,}75$$

5) Um quadrado tem 2 m de perímetro Calcule seu apotema e sua diagonal.

Temos

$$2p_4 = 4l_4 = 2 \text{ m}$$

$$l_4 = \frac{2 \text{ m}}{4} = 0{,}5 \text{ m}$$

Mas

$$a_4 = \frac{l_4}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25 \text{ m}$$

Vimos anteriormente que:

$$d = l\sqrt{2}, \text{ então:}$$
$$d = 0{,}25 \times 1{,}414 = 0{,}3535 \text{ m}$$

6) O diâmetro de um círculo vale $\sqrt{2}$ m. Calcular o perímetro do quadrado inscrito nesse círculo.

O perímetro do quadrado é:

$$2p_4 = 4l_4$$

Temos que calcular então, l_4 Mas

$$l_4 = R\sqrt{2}$$

O problema diz que

$$2R = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então:

$$l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1 \text{ m}$$

Assim sendo

$$2p_4 = 4l_4 = 4 \times 1\text{ m} = 4\text{ m}$$

7) A diagonal de um quadrado é igual ao apotema de um hexágono regular. Calcule a razão do lado do quadrado para o lado do hexágono.

A diagonal de um quadrado é dada por:

$$d_4 = l_4\sqrt{2}$$

O problema diz que:

$$d_4 = a_6 \quad e \quad a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Então:

$$l_4\sqrt{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad e$$

$$l_4 = \frac{R\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{6}}{4}$$

Sabemos também que:

$$l_6 = R$$

A razão pedida $\frac{l_4}{l_6}$ será:

$$\frac{l_4}{l_6} = \frac{\frac{R\sqrt{6}}{4}}{R} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

8) Sendo d a diagonal de um quadrado inscrito num círculo, calcule em função de d: o lado do triângulo equilátero o lado e o apotema do hexágono regular circunscrito a esse círculo.

Para calcularmos o que foi pedido teremos que determinar o raio do círculo, no qual c quadrado inscrito tem para diagonal d.

Teremos então:

$$d = l_4\sqrt{2} = R\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2R \quad e$$

$$R = \frac{d}{2}$$

É a esse círculo, de raio $\frac{d}{2}$, que se vai circunscrever o triângulo equilátero e o hexágono, cujos lados são expressos por:

$$l_3 = 2r\sqrt{3} \quad e \quad l_6 = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$$

em que r é o raio do círculo inscrito aos polígonos e que vimos ser $\frac{d}{2}$. Então

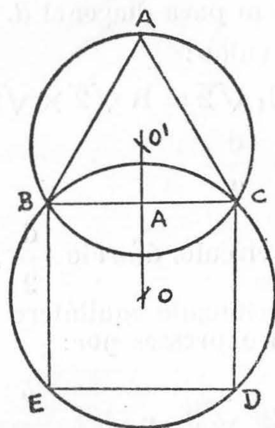
$$l_3 = 2 \times \frac{d}{2}\sqrt{3} = d\sqrt{3} \quad e$$

$$l_6 = \frac{2}{3} \times \frac{d}{2}\sqrt{3} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$$

O apotema do polígono circunscrito à um círculo é o raio do círculo inscrito ao polígono. Consequentemente

$$a_6 = \frac{d}{2}$$

9) Um pentágono de 30 m de perímetro é decomposto por uma diagonal em um triângulo equilátero e um quadrado. Calcule a distância dos centros dos círculos circunscritos a esses dois polígonos regulares.



O perímetro do pentágono (não regular) sendo de 30 m, cada lado valerá 6 m do triângulo equilátero ABC e do quadrado BCDE.
Calculemos os raios dos círculos circunscritos aos dois polígonos. Teremos:

$$l_3 = R\sqrt{3} \quad \text{e} \quad l_4 = R'\sqrt{2}$$

$$6 = R\sqrt{3} \quad 6 = R'\sqrt{2}$$

$$R = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$R' = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

A distância dos centros OO' pode ser decomposta em OA + O'A.
Vê-se claramente que OA e O'A são respectivamente os apotemas do quadrado e do triângulo equilátero.
Calculemos então seus valôres:

$$a_3 = \frac{R}{2} \qquad a_4 = \frac{R'\sqrt{2}}{2}$$

$$a_3 = \frac{2\sqrt{3}}{2} \qquad a_4 = \frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}$$

$$a_3 = \sqrt{3} = 1{,}73 \qquad a_4 = 3$$

Então:

$$OO' = OA + O'A = 3 + 1{,}73 = 4{,}73\,m$$

10) Sendo *h* a altura de um triângulo equilátero, calcule, em função de h, a diagonal do quadrado isoperímetro desse triângulo.
Sabemos que

$$h = \frac{l_3\sqrt{3}}{2}$$

Para sabermos o perímetro do triângulo temos que conhecer seu lado que será:

$$l_3 = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$$

Então

$$2p_3 = 3 \times \frac{2h\sqrt{3}}{3} = 2h\sqrt{3}$$

O quadrado isoperímetro tem o mesmo perímetro do triângulo; então

$$2p_4 = 4\,l_4 = 2h\sqrt{3} \quad e$$

$$l_4 = \frac{2h\sqrt{3}}{4} = \frac{h\sqrt{3}}{2}$$

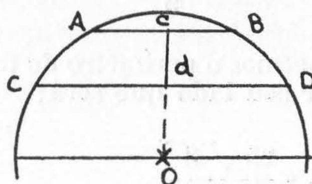
A diagonal do quadrado é dada por:

$$d = l_4\sqrt{2}$$

Consequentemente

$$d = \frac{h\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{h\sqrt{6}}{2}$$

11) Num semi círculo de 6 m de raio traçam-se duas cordas que representam os lados do quadrado e do hexágono regulares inscritos e que são paralelos. Achar as distâncias que separa as duas cordas.



Sejam AB e CD respectivamente as cordas representativas dos lados do hexágono e do quadrado inscritos. A distância procurada é a representada na figura por *cd*. Mas

$$cd = oc - od$$

que são respectivamente os apotemas do hexágono e do quadrado. É bastante, então, calculá-los. Temos

$$oc = a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,m$$

$$od = a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\,m$$

$$cd = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 3 \times 0{,}32 = 0{,}96\,m$$

12) A base de um triângulo isósceles tem 3 cm e o ângulo do vértice é 36°. Calcular o perímetro dêsse triângulo.

O ângulo do vértice tendo 36° o seu valor é o do ângulo cêntrico do decágono, cujo lado, pelos dados do problema é 3 cm
É bastante pois, calcular o raio do círculo onde está inscrito o decágono de lado 3 cm, para têrmos os lados do triângulo, cujo perímetro pretendemos calcular.
Teremos então:

$$l_{10} = 0{,}618\,R \quad e$$

$$3 = 0{,}618\,R \quad e \quad R = \frac{3}{0{,}618} = 4{,}85\text{ cm}$$

O perímetro do triângulo será pois:

$$2p = 4{,}85\text{ cm} + 4{,}85\text{ cm} + 3\text{ cm} = 12{,}70\text{ cm}$$

13) Achar a razão entre os perímetros de dois triângulos, um inscrito e outro circunscrito à mesma circunferência.

O lado do triângulo inscrito no círculo é

$$l_3 = R\sqrt{3}$$

o perímetro será

$$2p = 3R\sqrt{3}$$

O lado do triângulo circunscrito ao mesmo círculo é

$$l'_3 = 2R\sqrt{3}$$

e o perímetro

$$2p' = 6R\sqrt{3}$$

A razão entre os perímetros é:

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{3R\sqrt{3}}{6R\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

14) O lado de um octógono regular convexo inscrito num círculo mede $\sqrt{2}$ m. Calcular o lado do octógono regular circunscrito no mesmo círculo.

Temos a expressão:

$$\frac{L}{l} = \frac{R}{a} \quad (1)$$

No caso do problema temos $l_8 = \sqrt{2}$ e iremos calcular o raio do círculo circunscrito ao octógono (R), bem com o seu apotema (a).

Temos:

$$l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{ou}$$

$$\sqrt{2} = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Sabemos que:

$$a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{ou}$$

$$a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \times \sqrt{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

De posse desses valores façamos as substituições em 1:

$$\frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \times \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Então

$$L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 4\,(2-\sqrt{2}) =$$

$$= 4 \times 0{,}586 = 2{,}344 \text{ m}$$

15) A base de um triângulo isósceles mede 2 m e o ângulo do vértice 45°. Calcular o perímetro desse triângulo.

Se o ângulo do vértice mede 45° e o triângulo é isósceles porque o lado oposto ao dito ângulo pode ser considerado com o lado do octógono regular inscrito num círculo cujo raio são os lados iguais do triângulo isósceles.
Calculemos então o raio do círculo no qual um octógono tem para lado 2 m.

Temos:

$$l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad 2 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{e}$$

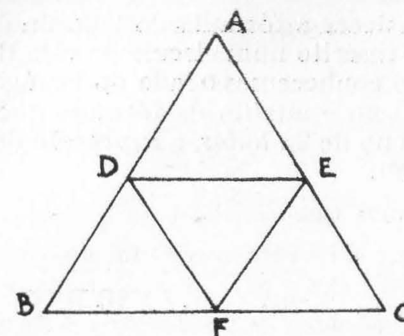
$$R = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2-1{,}4142}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{0{,}5858}} = \frac{2}{0{,}75} = 2{,}63$$

O perímetro será pois

$$2p = 2 \times 2{,}63 + 2 = 5{,}26 + 2 = 7{,}26 \text{ m}$$

16) Ligam-se os meios dos lados de um triângulo equilátero formando-se outro triângulo equilátero. A soma dos perímetros dos dois triângulos é igual a 90 m. Calcule o raio do círculo em que pode ser inscrito o triângulo maior.



Os pontos D, E e F sendo os meios dos lados do triângulo as retas DE, DF e EF são paralelos aos lados BC, AC e AB respectivamente e valem a metade de BC, AC e AB.
Se chamarmos de l os lados do triângulo grande o lado do pequeno será $\frac{l}{2}$. Os perímetros dos dois valendo 90 m, teremos:

$$90 = 3l + \frac{3l}{2} \quad \text{e} \quad l = 20 \text{ m}$$

O lado do triângulo equilátero sendo

$$l_3 = R\sqrt{3}$$

o raio do círculo será:

$$R = \frac{l_3}{\sqrt{3}} = \frac{l_3\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou}$$

$$R = \frac{20 \times 1{,}73}{3} = \frac{34{,}60}{3} = 11{,}53 \text{ m}$$

17) Estabelecer a fórmula do lado do dodecágono regular inscrito num círculo de raio R.
Como conhecemos o lado do hexágono, calcularemos, com o auxílio da fórmula que dá o lado do polígono de 2n *lados*, a expressão do lado do dodecágono.

Sabemos que

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

que aplicada ao caso dá:

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_6^2}} =$$

$$= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} =$$

$$= R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

18) Calcular o lado e o apotema do pentágono inscrito no círculo de raio 2 m, utilisando as relações trigonométricas.

Temos as fórmulas

$$l_n = 2R \operatorname{sen} \frac{180}{n} \qquad \text{e} \qquad a_n = R \cos \frac{180}{n}$$

que no caso dão:

$$l_5 = 2 \times 2 \times \operatorname{sen} \frac{180}{5} \qquad \text{e} \qquad a_5 = 2 \times \cos \frac{180}{5}$$

$$l_5 = 4 \operatorname{sen} 36° \qquad \text{e} \qquad a_5 = 2 \cos 36°$$

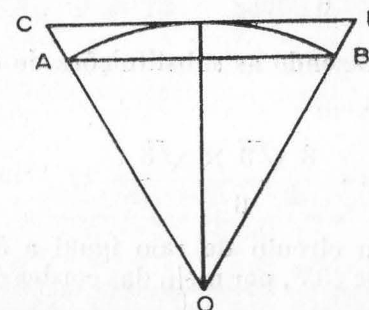
Na tabela anexa das linhas trigonométricas de alguns ângulos encontramos:

$$\operatorname{sen} 36° = 0{,}59 \qquad \text{e} \qquad \cos 36° = 0{,}81$$

Então

$$l_5 = 4 \times 0{,}59 = 2{,}36 \text{ m} \qquad \text{e} \qquad a_5 = 2 \times 0{,}81 = 1{,}62 \text{ m}$$

19) Num círculo de centro O e de diâmetro 24 cm, traçam-se os raios OA e OB formando um ângulo de 60°. Determinar o raio do círculo que é tangente interiormente ao círculo *O* e tangente aos raios OA e OB.



Na figura temos
AOB — setor circular de 60°
AB — lado do hexágono regular inscrito
CD — lado do hexágono regular circunscrito ao mesmo círculo.
Calculemos o seu valor.
Vimos que

$$\frac{L}{l_1} = \frac{R}{a}$$

No caso presente

$$\frac{L}{12} = \frac{12}{\frac{12\sqrt{3}}{2}} \quad \text{e} \quad L = 8\sqrt{3}$$

Por outro lado a figura CDO é um triângulo equilátero (semelhante ao AOB, que é equilátero). O círculo inscrito no triângulo CDO é tangente a CD e consequentemente ao arco AB, como pede o problema

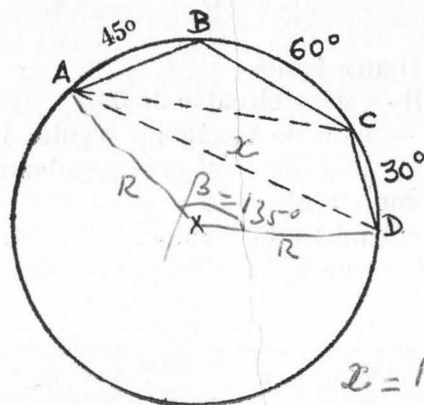
O raio do círculo inscrito no triângulo equilátero, em função do lado é

$$r = \frac{l}{6}\sqrt{3}$$

Então fazendo as substituições de l por seu valor $8\sqrt{3}$, vem:

$$r = \frac{8\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{6} = 4\,\text{cm}$$

* 20) Em um círculo de raio igual a 5 m, calcular a corda de 135°, por meio das cordas de 45°, 60° e 30°.



180
135
45

$x = R\sqrt{2 - 2\cos 135°}$

$x = 5\sqrt{2 - 2(-\cos 45°)}$

$x = 5\sqrt{2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= 5\sqrt{2 + 1,414}$

$x = 5\sqrt{3,414} = 5 \times 1,85 = 9,25$

A corda AB é o lado do octógono e tem para valor, no caso do problema

$$AB = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 5 \times 0,765 = 3,825\,\text{m}$$

A corda BC é o lado do hexágono e tem para valor

$$BC = 5\,\text{m}$$

A corda CD é o lado do dodecágono e tem para valor

$$CD = \frac{R}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = \frac{5}{2} \times 1,03 = 2,575\,\text{m}$$

Conhecidas as cordas AB e BC, vimos como calcular a corda da soma dos arcos no caso AC. Teremos:

$$AC = \frac{AB\sqrt{4R^2 - BC^2} + BC\sqrt{4R^2 - AB^2}}{2R} =$$

$$= \frac{3,825\sqrt{100 - 25} + \sqrt{100 - 14,630}}{10} =$$

$$= \frac{3,825 \times 8,65 + 5 \times 9,24}{10} = 7,9106\,\text{m}$$

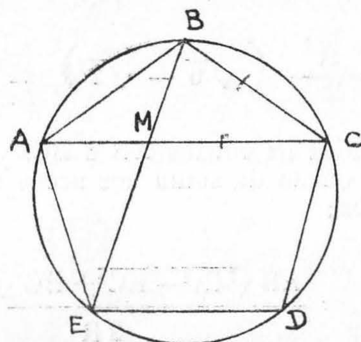
Conhecemos assim a corda AC e também a corda CD; podemos então calcular a corda AD, que é a corda da soma dos arcos AC e CD. Teremos então:

$$AD = \frac{AC\sqrt{4R^2 - CD^2} + CD\sqrt{4R^2 - AC^2}}{2R} =$$

$$= \frac{7,910\sqrt{100-6,630} + 2,575\sqrt{100-15,568}}{10} =$$

$$= \frac{7,910 \times 9,6 + 2,575 \times 6,1}{10} = 9,16435 \text{ m.}$$

* 21) A diagonal de um pentágono regular vale 3m. Pede-se o apotema do octógono regular inscrito no mesmo círculo.



Vimos no capítulo "Polígonos etc." que as diagonais de um pentágono se cortam em média e extrema razão e que, na figura MC = BC.
Sendo assim

$$MC^2 = BC^2$$

A reta AC é pois dividida em média e extrema razão no ponto M.
Calculemos pois o maior segmento MC, igual ao lado do pentágono.
Teremos:

$$MC = \frac{AC}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \quad \text{ou}$$

$$MC = \frac{3}{2} \times 1,236 = 1,854$$

Conhecido o lado do pentágono, calculemos o raio do círculo a ele circunscrito

$$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \text{ou}$$

$$1,854 = \frac{R}{2} \times 2,55 \quad \text{e} \quad R = 1,58 \text{ m.}$$

Calculemos agora o apotema do octógono.

$$a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \text{ou}$$

$$a_8 = \frac{1,58}{2} \times 1,84 = 1,58 \times 0,92 = 1,4536 \text{ m}$$

EXERCÍCIOS À RESOLVER

1) Qual o ângulo cêntrico de um dodecágono?

RESP.: 30º

2) Qual o polígono regular cujo ângulo cêntrico é 40º

RESP.: Eneágono

3) A razão do ângulo central de um polígono regular para o ângulo interno é igual a $^2/_3$. Calcule o número de lados desse polígono.

REPS.: 5

4) Dois polígonos regulares convexos teem respectivamente n e n + 2 lados. Determinar esses polígonos, sabendo-se que a diferença entre os seus ângulos cêntricos é de 15°.

RESP.: hexágono e octógono

5) Calcular o lado do triângulo equilátero circunscrito em um círculo de raio 15 cm.

C. Naval — 1963 RESP.: 51,9 cm

6) Um triângulo equilátero tem 9 m de perímetro e está inscrito num círculo de raio 1,732. Calcular o apotema e a altura do triângulo.

RESP.: $a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

7) O lado de um quadrado inscrito em um círculo é 4,9 m. Calcular o lado do hexágono inscrito no mesmo círculo.

RESP.: 3,5 m

8) A altura de um triângulo equilátero é igual ao apotema de um quadrado. Calcule a razão do perímetro do quadrado para o perímetro do triângulo.

RESP.: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

9) Num círculo de raio R está inscrito um triângulo equilátero; em outro círculo de raio R' está inscrito um hexágono. Estabelecer a razão de R para R', de modo que os dois polígonos tenham o mesmo perímetro.

RESP.: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10) Num círculo de raio igual a $\sqrt{3}$ metros estão inscritos um triângulo equilátero e um quadrado. Qual o excesso do perímetro do quadrado sôbre o perímetro do triângulo?

C. Naval — 1957 RESP.: 0,76 m

11) Em um círculo, a corda AB é o lado do quadrado inscrito e BC é o lado do triângulo equilátero inscrito. Calcule os ângulos internos do triângulo ABC, sabendo-se que o centro do círculo é interior a êste triângulo.

C. Naval — 1958 RESP.: 60°; 75°; 45°

12) Num círculo estão inscritos um quadrado e um hexágono regular. A diagonal do quadrado mede 4 m. Calcular o perímetro do hexágono regular.

E.N.C. Dutra — 1948 RESP.: 12 m

13) Num círculo está inscrito um triângulo equilátero de lado l = 173 m. Calcule o perímetro do decágono regular inscrito nesse círculo.

I.E. — 1951 RESP.: 618 m

14) Num círculo está inscrito um hexágono regular de 60 m de perímetro. Calcule a altura do triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo.

I.E. — 1951 RESP.: 15 m

15) O apotema de um quadrado inscrito num círculo mede $5\sqrt{2}$ metros. Calcular o lado do triângulo equilátero inscrito.

C. Naval — 1951 RESP.: 17,32 m

16) Qual deve ser o raio de um círculo se quizermos que o lado do quadrado inscrito tenha 25 dm a menos que o lado do triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo.

C. Naval — 1961 RESP.: 78,125 dm

17) Num círculo estão inscritos um quadrado e um triângulo equilátero; num outro círculo está inscrito um hexágono regular. O lado do quadrado é igual ao apotema do hexágono e o lado deste mede 5 m. Calcular o lado do triângulo equilátero.

RESP.: 5,28 m

+ 18) Um trapézio isósceles está inscrito num círculo de 5 cm de raio; uma base do trapézio é o lado do hexágono regular e a outra do triângulo equilátero inscritos. Calcular a altura desse trapézio.

RESP.: 1.ª sal: 6,83 cm
2.ª sal: 1,83 cm

* 19) Calcular o lado e o apotema do hexágono regular inscrito no triângulo equilátero de 6 m de lado.

RESP.: 2 m e 1,73 cm

20) O lado de um hexágono regular inscrito num círculo mede 6 cm. Calcular o perímetro do hexágono regular circunscrito ao mesmo círculo.

RESP.: $24\sqrt{3}$ cm

21) A base de um triângulo isósceles mede 2 m e o ângulo do vértice 30°. Calcular o perímetro desse triângulo.

RESP.: 9,76 m

22) De um ponto P, situado a uma distância igual a 2R do centro de um círculo de raio R, partem duas tangentes PA e PB a esse círculo. Calcular as tangentes PA e PB, o ângulo APB e a corda de contato AB. (Thire)

(Thire) RESP.: $PA = PB = R\sqrt{3}$,
ângulo APB = 60°
$AB = R\sqrt{3}$

23) O ângulo ABC mede 105° e está inscrito num círculo. O arco BC tem 90 graus e o raio do círculo 6 cm. Calcular a corda do arco AB.

RESP.: 6 cm

24) Um quadrilátero ABCD está inscrito num círculo de raio 4 cm. Os arcos AB, BC e CD teem respectivamente 30°, 60° e 90°. Calcular o perímetro do quadrilátero.

RESP.: 19,7

23) Num círculo está inscrito um ângulo de 90°. As cordas que formam os lados do ângulo são iguais e valem 2 cm. Calcular o raio do círculo.

RESP.: 1,414 cm

* 26) O lado de um polígono regular inscrito num círculo de raio igual a 10 m vale 12 m. Calcular o lado do polígono circunscrito semelhante.

RESP.: 15 m

27) O lado do decágono regular inscrito em um círculo mede $6\left(\sqrt{5}-1\right)$ cm. Calcule o lado do decágono regular circunscrito no mesmo círculo.

ok C. Naval — 1960 RESP.: 7,84 cm

* 28) Num círculo de raio 3 cm, traça-se uma corda AB igual ao lado do triângulo equilátero inscrito e no

maior segmento circular determinado por esta corda traçam-se as cordas AC e BD iguais ao lado do quadrado inscrito. Calcular o perímetro do quadrilátero ABCD.

RESP.: 16,65 cm

29) A soma dos perímetros dos quadrados inscrito e circunscrito a um círculo é igual a $2 + \sqrt{2}$. Calcule o raio desse círculo.

RESP.: 0,25

30) Estabelecer a fórmula do lado do dodecágono regular circunscrito a um círculo de raio R.

RESP.: $L_{12} = 2R\left(2 - \sqrt{3}\right)$

* 31) Calcular o lado e o apotema do pentadecágono inscrito num círculo de raio 4 dm.

RESP.: ~~1,56~~ 1,68 dm e 3,91 dm

32) Qual o comprimento do lado do decágono regular inscrito num círculo de raio igual a $\left(\sqrt{5} + 1\right)$ metros?

C. Naval — 1957 RESP.: 2 metros

33) Numa circunferência de raio 5 m, dar o valor do lado do dodecágono regular convexo nele inscrito.

E.N.C. Dutra — 1949 RESP.: 2,56 m

* 34) Calcular o lado e o apotema do polígono de 18 lados inscrito num círculo de raio 6,3 m

RESP.: 2,18 m e 6,2 m

ok

→ * 35) O apotema de um pentadecágono mede 3,92 m Calcular o lado e o raio do mesmo polígono.

RESP.: 1,66 m e 4 m

* 36) Calcular os lados de um triângulo retângulo isósceles isoperímetro do quadrado inscrito num círculo, cujo diâmetro mede 4 cm.

RESP.: 3,3 cm e 4,7 cm

ok

* 37) Um trapézio está inscrito num círculo de raio 10 cm. Uma de suas diagonais forma com a base um ângulo de 45º e com um dos lados não paralelos um ângulo de 30 graus. Calcular os lados e a altura do trapézio.

RESP.: 17,32 m; 10 cm; 14,14 cm 14,14 cm e 19,32 cm

ok

* 38) Num círculo de raio 2 m, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito determina sôbre essa hipotenusa um segmento igual ao apotema do triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo. Calcule o perímetro desse triângulo.

I.E. — 1955 RESP.: 9,47 m

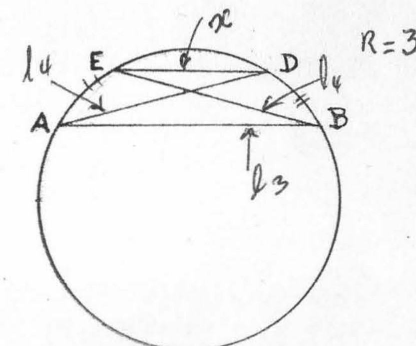
39) Num círculo de diâmetro AC = 6 cm de centro O e raio AO, AB é o lado do hexágono inscrito no referido círculo. Determine o valor da projeção da corda AB sôbre o diâmetro AC.

E.P.C.Ar — 1963 RESP.: 1,5 cm

* 40) Na figura AB é o lado do triângulo equilátero inscrito no círculo de raio 3. AD e EB são lados de quadrados inscritos nesse círculo. Calcule a corda ED = x.

C. Naval — 1958

RESP.: 3 m



$\widehat{AD} = \widehat{BE} = 90°$
$\widehat{BD} = \widehat{AE} = 120° - 90° = 30°$
$\widehat{ED} = 120° - 2\times30° = 60°$
$x = l_6 = 3$

41) Um hexágono regular ABCDEF está inscrito em um círculo. Prolongam-se nos dois sentidos, os lados AB, CD e EF que se vão cortar nos pontos M, N e P. Demonstre que o triângulo MNP é equilátero.

I.E. — 1951

42) Seja ABC um triângulo equilátero inscrito num círculo de raio R. Liga-se o ponto médio D do arco AC ao ponto médio H do lado BC. Você vai calcular DH em função de R.

E.P.C.Ar — 1963 Resp.: $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

MEDIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Retificar uma circunferência é determinar um segmento de reta de comprimento igual ao da circunferência dada.

Comprimento de uma circunferência (C) é o limite para que tendem os perímetros dos polígonos nela inscritos, quando o número de lados duplica indefinidamente.

Teorema fundamental

A razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e o diâmetro é constante.

Relação

$$\frac{C}{2R} = \pi \text{ (pi) } \quad \text{ou}$$

$$C \text{ (comprimento da circunferência) } = 2\pi R.$$

como $2R = D$ (diâmetro), também podemos escrever

$$C = \pi D.$$

O valor de π não pode ser obtido exatamente; é um número *incomensurável*. Foi Arquimedes quem determinou, pela primeira vez, o valor de π. Seu valor já foi obtido com cêrca de 700 casas decimais. Normalmente adotamos para valor de π, 3, 1416.

Uma regra de três, simples, nos permite calcular o comprimento de um arco de *n* graus partindo-se do comprimento da circunferência.

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

Na qual:

l — comprimento do arco retificado
n — número de graus do arco
R — raio do círculo ao qual pertence o arco

No caso do arco ser expresso em graus minutos e segundos, embora a fórmula anterior seja geral, podemos empregar:

$$l = \frac{\pi R}{180}\left(n^o + \frac{n'}{60} + \frac{n''}{3600}\right)$$

Na qual n, n' e n" exprimem os graus, minutos e segundos do arco, respectivamente.

Radiano — O ângulo central que intercepta um arco igual ao raio, tem um valor constante, qualquer que seja o raio do círculo, e é denominado *radiano*, cujo símbolo é *rd.*

É mais uma medida de ângulo. Conclue-se fàcilmente que a circunferência, que vimos ter 360° ou 400 gr., tem 2π radianos. É fácil, portanto, transformar-se graus em radianos ou grados em radianos e vice-versa, como faremos oportunamente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Calcular o comprimento de uma circunferência cujo raio mede 4 m.

A expressão que dá o comprimento de uma circunferência sendo $C = 2\pi R$, vem depois de substituir R e π pelos seus valôres.

$$C = 2 \times 3{,}1416 \times 4 = 25{,}1328 \text{ m}$$

2) O raio de uma pista circular é 100 m. Um ciclista que deu 500 voltas na pista, quantos metros andou?

Em cada volta o ciclista andou

$$C = 2\pi R \text{ ou } C = 2 \times 3{,}1416 \times 100 = 628{,}32 \text{ m}$$

como deu 500 voltas, percorreu

$$628{,}32 \times 500 = 314160 \text{ m}$$

3) Calcular o comprimento de uma circunferência, na qual foi inscrito um hexágono de 3 cm de lado.

O comprimento da circunferência sendo obtido através da fórmula

$$C = 2\pi R$$

verifica-se que para calculá-lo torna-se necessário conhecer *R.*

O problema diz que o hexágono sendo inscrito tem 3 cm de lado e como

$$l_6 = R$$

Segue-se que

$$R = 3 \text{ cm}$$

Isto posto

$$C = 2 \times \pi \times 3 = 18{,}8496$$

4) O comprimento de uma circunferência é 18,84. Qual o polígono regular inscrito, cujo apotema mede 2,121.

A fórmula geral dos apotemas é

$$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

$a_n = 2{,}121$; o perímetro da circunferência sendo 18,84 ficamos sabendo o raio do círculo

$$R = \frac{18{,}84}{6{,}28} = 3$$

Substituindo na fórmula dos apotemas a_n por 2,121 e R por 3, vem:

$$2{,}121 = \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 3^2 - l_n^2} \quad \text{ou}$$

$$4{,}242 = \sqrt{36 - l_n^2} \quad \text{ou}$$

$$(4{,}242)^2 = 36 - l_n^2 \quad \text{e}$$

$$l_n^2 = 18 \quad \text{e} \quad l_n = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Observando-se esse resultado $3\sqrt{2}$, vemos que o coeficiente do radical é o raio do círculo e poderemos generalizar escrevendo

$$l_n = R\sqrt{2}$$

Concluimos então ser l_n o valor de l_4, isto é, lado do quadrado.

5) Calcular o comprimento de um arco de 15° num círculo de raio 3 cm.

A fórmula que dá o comprimento de um arco vimos ser:

$$l = \frac{\pi Rn}{180}$$

fazendo as substituições, vem:

$$l = \frac{3{,}1416 \times 3 \times 15}{180} = 0{,}7854 \text{ cm}$$

6) Calcular o comprimento de um arco de 20° 36' 40", num círculo de raio 10 cm.

Vimos que a fórmula

$$l = \frac{\pi R}{180}\left(n^o + \frac{n'}{60} + \frac{n''}{3600}\right)$$

evita a necessidade de transformar o arco dado em graus, minutos e segundos em fração do grau, para que a fórmula anterior fosse aplicada.

Fazendo as substituições vem:

$$l = \frac{\pi \times 10}{180}\left(20 + \frac{36}{60} + \frac{40}{3600}\right) \quad \text{ou}$$

$$l = 3{,}595 \text{ cm}$$

7) Calcular o raio de um círculo em que um arco de 10° mede 1,44 cm.

Da fórmula que nos dá o comprimento de um arco, tiramos

$$R = \frac{180\,l}{\pi n}$$

que depois das substituições dá

$$R = 8{,}25 \text{ cm}$$

8) Calcular o número de graus de um arco cujo comprimento é 3,6 cm num círculo de raio 10 cm.

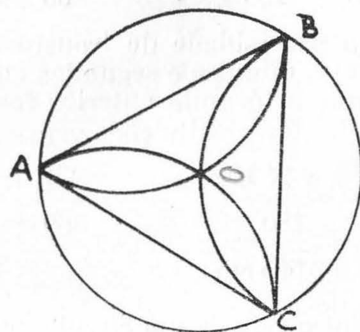
Da fórmula que dá o comprimento de um arco, tiramos:

$$n = \frac{180\,l}{\pi R}$$

que depois das substituições dá:

$$n = 20^\circ\ 38'\ 13''$$

9) Num circulo de centro O e raio 10 cm está inscrito um triângulo ABC, equilátero. Os arcos AOB, AOC e BOC formam uma rosacea. Calcular o perímetro da rosacea.



A figura nos mostra que o perímetro da rosacea é a soma dos três arcos AOB, AOC e BOC de 120° cada um e de raio 10 cm. Calculado o comprimento de um é bastante multiplar o resultado por 3 para termos o perímetro pedido.
Assim

$$l = \frac{\pi R n}{180} \quad \text{ou}$$

$$l = \frac{3{,}1416 \times 10 \times 120}{180} = 20{,}944$$

O perímetro, como vimos é

$2p = 3l$ ou $2p = 62{,}832$ cm

10) Achar a medida em radianos do arco de 15°
Vimos no início do capítulo o que é o radiano

Então

360° corresponde 2π rd
15° —— x

$$x = \frac{2\pi \times 15}{360} = \frac{\pi}{12} \text{ radianos}$$

11) Quantos graus tem 1 radiano?

360 —— 2π
x —— 1

$$x = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} = 57° \ 17' \ 44'',3$$

12) Calcular a medida em grados do arco de 0,4 rd.

Sabemos que

400 gr corresponde 2π rd
x —— 0,4 rd

$$x = \frac{400 \times 0{,}4}{2\pi} = 25{,}47 \text{ gr.}$$

13) Determine a medida em radianos do arco de 11° 15'

Temos

360° —— 2π rd ou
180° —— π rd ou
180° = 10800' —— π rd
11° 15' = 675' —— x

$$x = \frac{675 \times \pi}{10800} = \frac{1}{16}\pi$$

EXERCÍCIOS À RESOLVER

1) Calcular o comprimento de uma circunferência de raio igual a 50 cm.

RESP.: 314,16 cm

2) Calcule o comprimento de uma circunferência de 5 m de diâmetro.

E.P. Cadetes — 1952 RESP.: 15,7 m

3) Uma circunferência tem 31,416 m de comprimento. Quanto mede o raio.

RESP.: 5 m

4) Uma pista circular tem 628,32 m. Quantas voltas nessa pista deve dar um automóvel para percorrer 314,16 km?

RESP.: 500 voltas

5) Uma pista tem 20 m de raio. Determinar o número de voltas que deve dar um automóvel para percorrer 6280 m.

C. Naval — 1951 RESP.: 50 voltas

6) Calcular o comprimento de uma circunferência, na qual foi inscrito um triângulo equilátero de 30 m de perímetro.

RESP.: 36,2541 m

7) O lado de um triângulo equilátero inscrito num círculo, mede $5\sqrt{3}$ metros. Calcular o comprimento da circunferência do círculo.

C. Naval — 1951 RESP.: 31,4 m

8) O apotema de um quadrado é $\sqrt{2}$ metros. Calcular o comprimento da circunferência onde ele pode ser inscrito.

RESP.: 12,57 m

9) O comprimento de uma circunferência é 62,8 m. Qual o polígono regular inscrito, cujo apotema mede 5 m.

RESP.: Triângulo

10) O lado de um quadrado inscrito em um círculo mede $3\sqrt{2}$ metros. Calcule o comprimento da circunferência.

E.N.C. Dutra — 1955 RESP.: 18,85

11) Duas circunferências concêntricas formam uma coroa de 10 cm de largura. Calcule a diferença entre os comprimentos das duas circunferências.

E.N.C. Dutra — 1955 RESP.: 62,8 cm

12) Achar a razão entre o comprimento da circunferência e o perímetro do triângulo equilátero inscrito.

RESP.: $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

13) Calcular o comprimento de um arco de 25° num círculo de raio 6 cm.

RESP.: 2,618 cm

14) Calcular o comprimento de um arco de 28° 36′ 40″ num círculo de 5 dm de raio.

RESP.: 2,497 dm

15 Calcular o raio de um círculo em que um arco de 15° 20' mede 10 m.

RESP.: 3,9 m

16) Calcular o número de graus de um arco cujo comprimento é igual ao triplo do raio

RESP.: 171° 58' 28",28

17) Num circulo de 3 m de raio, um arco mede 1,5 m. Quanto mede, em graus, o ângulo central que subtende o arco considerado?

ok

C. Naval — 1958 RESP.: 28° 39' 44",71

* 18) Num círculo de raio 6 dm está inscrito um hexágono regular. Dos vértices do hexágono como centro e raio igual ao do círculo, descrevem-se para o interior do hexágono arcos de círculo. Determinar o perímetro da figura assim formada.

~~12π ou 37,68 m~~

RESP.: ~~7,536 metros~~

24π ou 75,36 m

ok

* 19) Cada vértice de um triângulo equilátero de 3 m de lado é tomado para centro de um círculo de raio igual ao lado. Os arcos assim descritos formam um triângulo curvilineo. Calcular o perimetro desse triângulo.

ok

RESP.: 9,4248 m

* 20) Um triângulo equilátero tem para lado 2 metros. De cada um dos vértices como centro, e com 1 m de raio, descreve-se um circulo Tem-se assim tres círculos iguais e tangentes dois a dois. Pede-se o perímetro da figura formada pelos tres arcos compreendidos entre os lados do triângulo.

RESP.: 3,1416 m

21) Exprimir em radianos o arco de 150°.

RESP.: $\frac{5}{6}\pi$ radianos

22) Transformar em radianos o arco de 123° 45'.

RESP.: $\frac{11}{16}\pi$ radianos

23) Transformar em graus o arco de $\frac{3}{5}\pi$ radianos.

RESP.: 108°

24) Transformar em graus o arco de 0,58 rd.

RESP.: 104° 24'

25) Transformar 25,46 gr em radianos.

RESP.: 0,4 rd.

26) Transformar em grados $\frac{2}{5}\pi$ radianos.

RESP.: 80 gr.

MEDIÇÃO DOS ARCOS DAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS. FORMULÁRIO

Área é a medida de uma superfície. Duas figuras congruentes (iguais por superposição) teem a mesma área. Duas figuras quaisquer que têm a mesma área são ditas *equivalentes*.

Teorema 1

As áreas de dois retângulos que teem uma dimensão igual, são proporcionais às dimensões desiguais.

Teorema 2

As áreas de dois retângulos quaisquer são proporcionais aos produtos dos números que exprimem as medidas de suas dimensões.

Relação entre as áreas de polígonos semelhantes

Teorema

As áreas de dois polígonos semelhantes são proporcionais aos quadrados de duas linhas homólogas quaisquer.

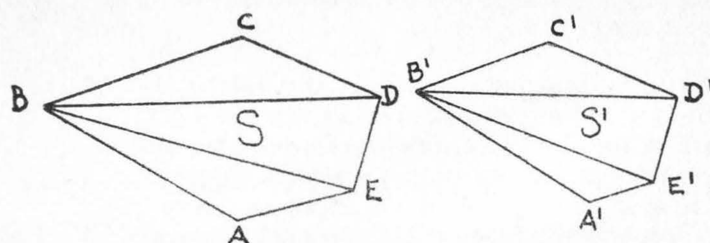


Fig. 1

Na figura temos dois polígonos semelhantes.

Relação:

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{BC^2}{B'C'^2} =$$

Teorema de Pitágoras

O quadrado construido sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é equivalente à soma dos quadrados construidos sobre os catetos.

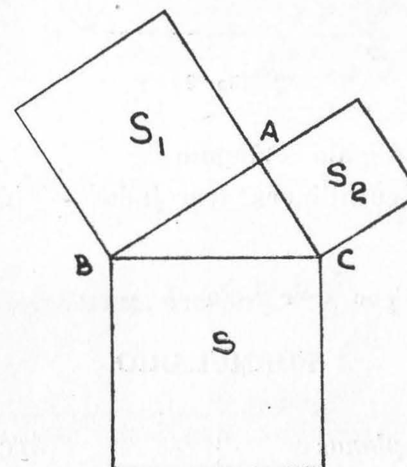


Fig. 2

Na figura 2 temos:

ABC — triângulo retângulo
S, S_1 e S_2, quadrados construidos sobre os hipotenusas e catetos do triângulo ABC.

Relação:

$$S = S_1 + S_2$$

Teorema das lúnulas

Construindo-se sobre os lados de um triângulo retângulo, tomados como diâmetro semi-circunferências, a área do triângulo dado é igual à soma das áreas das figuras curvilíneas P e Q, denominadas *lúnulas de Hipócrates.*

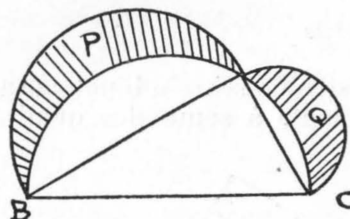


Fig. 3

ABC – triângulo retângulo

Superfícies curnilineas tracejadas — *lúnulas de Hipócrates*

$$S_{ABC} = S_P + S_Q$$

FORMULÁRIO

Figuras planas	*Arcas*
Triângulo qualquer	$S = \frac{b \times h}{2} = \frac{base \times altura}{2}$
(função dos lados)	$S = \sqrt{p\ (p-a)(p-b)(p-c)}$
Triângulo qualquer	$S = p\,r$
Triângulo qualquer	$S = \frac{abc}{4R}$

FORMULÁRIO

Figuras planas	~~Areas~~ AREAS
Triângulo retângulo	$S = \frac{ah}{2}$ ou $S = \frac{bc}{2}$
Triângulo isósceles	$S = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$
Triângulo isósceles	$S = \frac{ab^2}{4R}$ ou $S = R_B\sqrt{r\,R_A}$
Triângulo equilátero	$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ ou $S = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$ ou
	$S = 3r^2\sqrt{3}$ ou $S = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$ ou
	$S = \frac{R_A^2}{3}\sqrt{3}$
Paralelopamo	$S = b\,h$
Retângulo	$S = bh$
Losango	$S = \frac{dd'}{2}$
Quadrado	$S = l^2$ ou $S = \frac{d^2}{2}$ ou
	$S = 2R^2$ ou $S = 4r^2$
Trapézio	$S = \frac{B + b}{2} \times h$ ou

Figuras planas	*Arcos*
Trapézio	$S = mh \quad m = \dfrac{B+b}{2}$
Quadrilátero inscrito	$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$
Pentágono	$S = \dfrac{l^2}{4}\sqrt{25 + 10.\sqrt{5}}$ ou
	$S = \dfrac{5}{8} R^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ ou
	$S = 5\, r^2 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$
Hexágono	$S = \dfrac{3}{2} l^2 \sqrt{3}$ ou
	$S = \dfrac{3}{2} R^2 \sqrt{3}$ ou
	$S = 2r^2\sqrt{3}$
Octógono	$S = 2l^2 \left(\sqrt{2} + 1\right)$ ou
	$S = 2\,R^2 \sqrt{2}$ ou
	$S = 8r^2 \left(\sqrt{2} - 1\right)$

Figuras planas	*Arcos*
Decágono	$S = \dfrac{5}{2} l^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ ou
	$S = \dfrac{5}{4} R^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ ou
	$S = 2r^2 \sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$
Dodecágono	$S = 3l^2 \left(2 + \sqrt{3}\right)$ ou
	$S = 3\,R^2$ ou
	$S = 12\,r^2 \left(2 - \sqrt{3}\right)$
Polígono convexo qualquer (regular)	$S = p\,a$
Círculo	$S = \pi R^2$ ou
	$S = \pi \dfrac{D^2}{4}$
Setor	$S = \dfrac{ar}{2}$ ou
	$S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$
Segmento	$S = \dfrac{r}{2}\left(\dfrac{\pi R n}{180} - \dfrac{h}{2}\right)$ ou

FORMULARIO

Figuras planas.	*Arcos*
Segmento	$S = \frac{R}{2}(l - h)$
Trapézio circular	$S = \frac{\pi n}{360}(R^2 - R'^2)$ ou
	$S = \frac{l + l'}{2} \times h$
Caroa	$S = \pi(R^2 - R'^2)$
	$S = \pi h^2$
	$S = \frac{c + c'}{2} \times l$

No formulário
S — área
a, b, c — lados do triângulo
p — semi perímetro do triângulo
h — altura, em geral
r — raio do círculo inscrito
R — raio do círculo circunscrito
m — base média (trapézio)
R_A R_B e R_C raios dos círculos circunscritos.
d e d' — diagonais (losango)
l — lado do polígono regular
n — número de graus do arco
D — diâmetro
a — apotema
l e h — comprimento do arco retificado e metade da corda do arco duplo (segmento circular)
C, C' — circunferências
l — largura da coroa (coroa circular)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Qual a área de um quadrado cuja diagonal mede 8 m?

O formulário nos dá:

$$S_4 = l_4^2$$

Precisamos então achar o lado do quadrado.
Por outro lado vimos que

$$d_4 = l_4 \sqrt{2}$$

e como temos o valor de d_4 vem:

$$8 = l_4 \sqrt{2} \quad \text{e} \quad l_4 = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Assim sendo

$$S_4 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32\,m^2$$

Poderíamos também empregar a fórmula

$$S = \frac{d^2}{2} \quad \text{e} \quad S = \frac{8^2}{2} = 32\,m^2$$

2) A área de um paralelogramo é $80\,m^2$. Quais as dimensões desse paralelogramo (base e altura) se a diferença entre elas é de 2 m.

A área de um paralelogramo é

$$S = b \times h$$

Temos então:

$$80 = b \times h$$

Por outro lado

$$b - h = 2 \text{ (diz o problema)}$$

Então

$$80 = b \times (b - 2) \text{ ou } b^2 - 2b - 80 = 0 \text{ e}$$

$$b = 10\,m, \ h = b - 2 = 8\,m$$

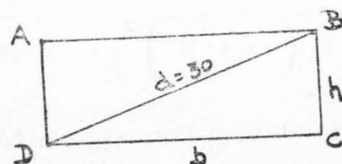
3) Calcular a área de um retângulo cujo perímetro vale 84 cm e a diagonal 30 m.

A área de um retângulo é

$$S = b \times h$$

O perímetro do retângulo é

$$2b + 2h = 84 \quad \text{ou} \quad b + h = 42$$



O triângulo BCD é retângulo e por isso

$$d^2 = b^2 + h^2$$

Fazendo as substituições, vem:

$$30^2 = b^2 + (42 - b)^2 \text{ ou } b^2 - 42b + 432 = 0$$

$$b = 24\,cm \quad e \quad h = 18\,cm$$

A área será pois

$$S = 24 \times 18 = 432\,cm^2$$

4) Um triângulo tem 48 cm² de área. Calcular a base e a altura sabendo que elas estão entre si na razão de $\frac{8}{3}$.

Sabemos que a área do triângulo é

$$S = \frac{b \times h}{2} \quad \text{e no caso}$$

$$48 = \frac{b \times h}{2} \quad \text{ou} \quad bh = 96 \quad (1)$$

Por outro lado

$$\frac{b}{h} = \frac{8}{3} \quad (2)$$

As equações (1) e (2) dão:

$$b = 16\,cm \quad e \quad h = 6\,cm$$

5) Calcular a área de um triângulo equilátero cujo perímetro é 36 m.

A área de um triângulo equilátero é:

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sendo o perímetro 36 m, cada, lado terá 12 m e a área será:

$$S = \frac{12^2 \times \sqrt{3}}{4} = 62{,}28\,m^2$$

6) Calcular a área de um losango sabendo que a maior diagonal vale 8 m e a menor é $\frac{3}{8}$ da maior.

A menor diagonal será

$$d_1 = 8 \times \frac{3}{8} = 3\,\text{m}$$

A área de um losango é

$$S = \frac{d \times d_1}{2}$$

e para o caso do problema

$$S = \frac{8 \times 3}{2} = 12\,\text{m}^2$$

7) A área de um trapézio é de 30 cm². Calcular as duas bases sabendo-se que a diferença entre elas é de 2 cm e a altura 3 cm.

A área de um trapézio é

$$S = \frac{B + b}{2} \times h$$

Sendo B e b as bases e h a altura. Então:

$$30 = \frac{B + b}{2} \times h \quad \text{ou} \quad B + b = 20 \quad \text{como}$$

$$B - b = 2 \quad \text{segue-se que } B = 11\text{cm e } b = 9\text{cm}$$

8) Calcular a área de um triângulo inscrito num círculo de raio igual 8,125 m, sabendo-se que seus lados medem 13 m, 14 m e 15 m.

Sabemos que

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Então:

$$S = \frac{13 \times 14 \times 15}{4 \times 8{,}125} = 84\,\text{m}^2$$

9) Calcular a área de um triângulo cujos lados são 13 m, 14 m e 15 m, circunscrito a um círculo de raio igual a 4 m.

Sabemos que

$$S = p \times r$$

Então

$$S = \frac{13 + 14 + 15}{2} \times 4 = 84\,\text{m}^2$$

10) Os lados de um triângulo medem 13 m, 14 m e 15 m. Calcular a área do triângulo.

Sabemos que

$$S = \sqrt{p\,(p - a)(p - a)(p - c)}$$

Substituindo p por 21 m, vem:

$$S = \sqrt{21 \times (21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)} = 84\,\text{m}^2$$

11) Calcular a área de um octógono inscrito num círculo de raio igual a 3 m.

A área do octógono em função do raio do círculo circunscrito é:

$$S = 2R^2\sqrt{2}, \quad \text{então}$$

$$S = 2 \times 3^2\sqrt{2} = 18 \times 1{,}41 = 25{,}38\,\text{m}^2$$

12) Calcular a área de um círculo cuja circunferência mede 18,84|m.

A área de um círculo é:

$$S = \pi R^2$$

Precisamos obter o raio, para calcular a área.

Como temos o perímetro da circunferência.

$$C = 2 \pi R \quad \text{ou}$$

$$18{,}84 = 2 \pi R \quad \text{ou}$$

$$R = \frac{18{,}84}{2 \pi} = \frac{9{,}42}{\pi}$$

A área procurada será pois:

$$S = \pi \times \left(\frac{9{,}42}{\pi} \right)^2 = \frac{88{,}7364}{3{,}1416} = 28{,}24 \text{ m}^2$$

13) Qual a área de um setor circular de 3 m de raio.

A área do setor circular é

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

Depois das substituições, vem

$$S = \frac{3{,}14 \times 9 \times 40}{360} = 3{,}14 \text{ m}^2$$

14) Calcular a área de um setor de 22° 30' num círculo de 28 m de raio.

Vimos que a área do setor circular é:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

No caso teremos:

$$S = \frac{\pi \times 784 \times \frac{1350}{60}}{360} = 153{,}86 \text{ m}^2$$

15) Calcular a área de um segmento circular de 60° num círculo de 4 m de raio.

A área do segmento circular é:

$$S = \frac{R\,(l - h)}{2}$$

Como

$$l = \frac{\pi R n}{180}, \text{ vem:}$$

$$l = \frac{\pi \times 4 \times 60}{180} = 418$$

h é a metade da corda do arco duplo. O arco duplo tem $2 \times 60° = 120°$ e sua corda é o lado do triângulo equilátero inscrito no círculo. Então

$$h = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 3{,}5 \text{ (aprox.)}$$

Então a área do segmento será:

$$S = \frac{4\ (4{,}2 - 3{,}5)}{2} = 1{,}4\ m^2$$

16) Calcular a área de uma coroa circular compreendida entre dois círculos cujos raios são 13 cm e 9 cm.

A área da coroa sendo

$$S = \pi\ (R^2 - r^2), \quad \text{vem:}$$

$$S = \pi\ (169 - 81) = 276{,}32\ cm^2$$

17) Calcular a área de uma coroa compreendida entre dois círculos, dos quais o maior tem uma corda de 6 cm, tangente à menor.

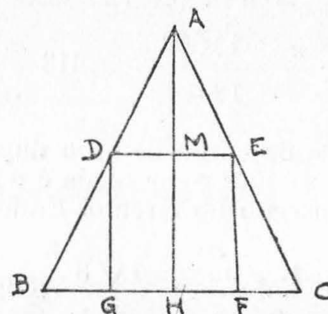
A área da coroa também pode ser

$$S = \pi\ t^2$$

na qual t é a metade da corda da maior circunferência tangente à menor; então

$$S = \pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 28{,}26\ cm^2$$

18) Calcular a área do quadrado inscrito em um triângulo isósceles de 6 cm de base e 0,16 m de perímetro. E.N.C. Dutra. — 1951



Na figura temos o triângulo isósceles ABC e o quadrado DEFG, inscrito no triângulo.

O triângulo ABC tendo para base 6 cm e para perímetro 16 cm, os lados iguais valem $\frac{16cm - 6cm}{} = 10cm$

A altura AH do triângulo será:

$$AH = \sqrt{25 - 9} = 4\ cm$$

Os triângulos ABC e ADE sendo semelhantes dão :

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AH}{AM}$$

Acontece que DE = MH = AH — AM; então

AM = AH — DE e teremos:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AH}{AH - DE} \quad \text{ou}$$

$$\frac{6}{DE} = \frac{4}{4 - DE} \quad \text{e}$$

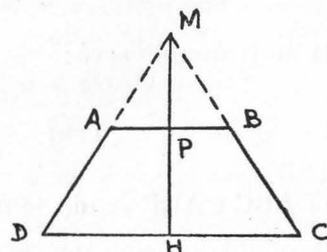
$$24 - 6\ DE = 4\ DE \quad \text{e} \quad DE = 2{,}4\ cm$$

Sendo o lado do quadrado 2,4 cm, sua área será

$$S = 2{,}4^2 = 5{,}76\ cm^2$$

19) As bases de um trapézio isósceles medem, respectivamente 8 m e 20 m, e a altura 6 m. Calcule a área do

triângulo formado pela base menor e os prolongamentos dos lados não paralelos
I.E. — 1951



Na figura temos o trapézio ABCD, isósceles e o triângulo MDC obtido com o prolongamento dos lados não paralelos. Os triângulos MDC e MAB são semelhantes e nos permitem escrever:

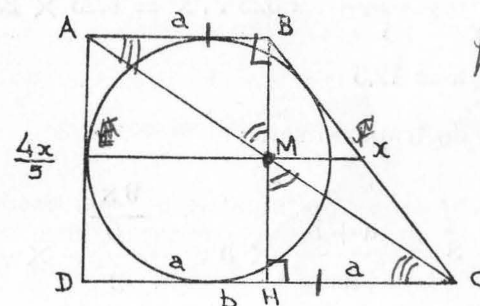
$$\frac{DC}{AB} = \frac{MH}{MP} \quad \text{ou} \quad \frac{20}{8} = \frac{MP + PH}{MP} \quad \text{ou}$$

$$\frac{20}{8} = \frac{MP + 6}{MP} \quad \text{ou} \quad MP = 4\,\text{m}$$

A área do triângulo MAB, será

$$S = \frac{AB \times MP}{2} = \frac{8 \times 4}{2} = 16\,\text{m}^2$$

10) Calcular a área do trapézio retângulo circunscrito a um círculo cujo raio é $^2/_5$ do lado oblícuo às bases, sabendo-se que a maior diagonal desse trapézio mede $5\sqrt{13}\,\text{cm}$.
C. Naval — 1960



Porque o trapézio é circunscrito temos:

$$a + b = \frac{4x}{5} + x = \frac{9x}{5}$$

Os triângulos retângulos MBA e MHC são congruentes porque o ponto M é a metade de AC e de BH. Os ângulos BMA e HMC são iguais. Conseqüentemente HC é igual a AB.

Assim sendo DC = b = 2a
Então

$$a + 2a = \frac{9x}{5} \quad \therefore \quad 3a = \frac{9x}{5} \quad \therefore$$

$$a = \frac{3x}{5} \quad \text{e} \quad b = \frac{6x}{5}$$

O triângulo ADC, retângulo nos dá:

$$\frac{16\,x^2}{25} + \frac{36\,x^2}{25} = 325 \quad \text{ou}$$

$$\frac{52\,x^2}{25} = 325 \;\therefore\; x^2 = 6{,}25 \times 25 \quad \text{e}$$

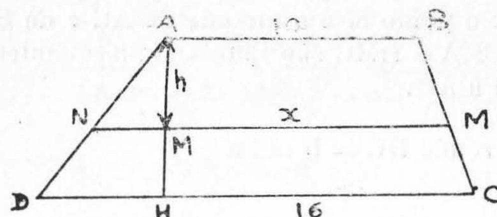
$$x = 12{,}5$$

A área do trapézio será:

$$S = \frac{a+b}{2} \times h = \frac{\frac{9\,x}{5}}{2} \times \frac{4\,x}{5} \quad \text{ou}$$

$$S = \frac{36\,x^2}{50} = \frac{36 \times 12{,}5^2}{50} = 112{,}50\ \text{cm}^2$$

21) As bases de um trapézio medem 16 m e 10 m e a altura 4 m. Traça-se uma paralela às bases que o divide em dois trapézios equivalentes. Calcular o segmento da paralela traçada compreendida entre os lados não paralelos.
C. Naval — 1963



Chamemos AM de *h*.
A área do trapézio ABCD é:

$$S = \frac{10 + 16}{2} \times 4 = 52\ \text{m}^2$$

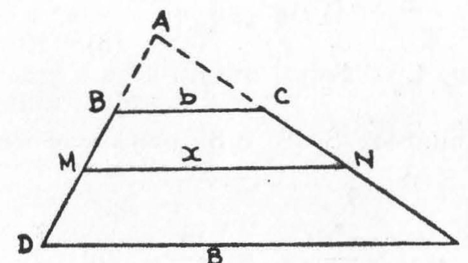
Suponhamos que a paralela às bases MN seja a reta que dividirá o trapézio dado em duas partes equivalentes, isto é, da mesma área ou seja, cada um com 26 m².
Teremos:

$$S \text{ trapézio ABMN} = \frac{10 + x}{2} \times h = 26\ \text{m}^2$$

$$S \text{ trapézio MNDC} = \frac{16 + x}{2} \times (4 - h) = 26\text{m}^2$$

Resolvendo-se o sistema formados pelas duas equações, encontraremos para o valor do x, que é MN, 13,34 m.

22) Dividir um trapézio, por uma linha paralela à base, em duas partes equivalentes ou que estejam na relação $\frac{m}{n}$.



Na figura temos três triângulos semelhantes de bases *b*, *x* e *B*, depois de prolongar os lados não paralelos do trapézio BCDE.
Podemos escrever

$$\frac{S_b}{b^2} = \frac{S_x}{x^2} = \frac{S_B}{B^2} = r \quad (1)$$

Chamando S_b, S_x e S_B as áreas dos triângulos de bases *b*, *x* e *B* respectivamente.
Delas tiramos

$$\left.\begin{array}{l} S_b = b^2r \\ S_x = x^2r \\ S_B = B^2r \end{array}\right\} \quad (2)$$

A área do trapézio BCMN pode ser expressa por

$$S_x - S_b$$

e a do trapézio MNDE por

$$S_B - S_x$$

Como as áreas devem estar na relação $\frac{m}{n}$, vem:

$$\frac{S_x - S_b}{S_B - S_x} = \frac{m}{n} \quad (3)$$

Substituindo-se S_x, S_b e S_B pelos seus valôres dados em (2), vem

$$\frac{x^2r - b^2r}{B^2r - x^2r} = \frac{m}{n} \quad \text{ou}$$

$$\frac{x^2 - b^2}{B^2 - x^2} = \frac{m}{n} \quad (4)$$

da qual tiramos

$$nx^2 - nb^2 = mB^2 - mx^2 \quad \text{ou}$$
$$x^2 (n + m) = mB^2 + nb^2 \quad \text{e}$$

$$x^2 = \frac{mB^2 + nb^2}{n + m}$$

Para que as partes fossem equivalentes era bastante fazer $\frac{m}{n} = 1$ ou $m = n$.

23) **As bases de um trapézio são 36 m e 48 m Pede-se o comprimento da paralela às bases que divide o trapézio em duas partes proporcionais aos números 3 e 5.**

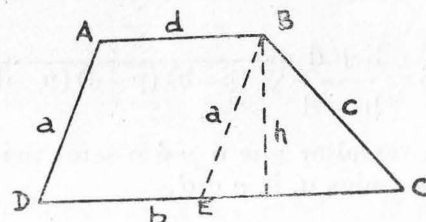
A expressão a que chegamos no exemplo anterior nos dá:

$$x^2 = \frac{3 \times 48^2 + 5 \times 36^2}{3 + 5} = \frac{6912 + 6480}{8} =$$

$$= \frac{13.392}{8} = 1674 \quad \text{e}$$

$$x = \sqrt{1674} = 40{,}9 \text{ m}$$

24) Calcular a área de um trapézio do qual conhecemos os quatro lados, *a, b, c, d*.



A área do trapézio é

$$S = \frac{b + d}{2} \times h \quad (1)$$

Na figura, vemos que a altura do trapézio é a mesma do triângulo BEC de lados a, c e $b - d$; lados conhecidos e cuja área pode ser expressa por

$$S_1 = \frac{b - d}{2} \times h \quad (2)$$

Dividindo membro a membro (1) por (2), vem:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\frac{b + d}{2} \times h}{\frac{b - d}{2} \times h} = \frac{b + d}{b - d} \quad \text{e}$$

$$S = \frac{b + d}{b - d} \times S_1$$

S_1, sendo a área de um triângulo de lados conhecidos, será:

$$S_1 = \sqrt{(p - b)(p - d)(p - d - a)(p - d - c)}$$

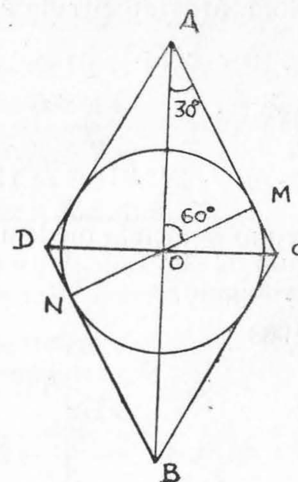
E a área do trapézio

$$S = \frac{b + d}{b - d} \sqrt{(p - b)(p - d)(p - d - a)(p - d - c)}$$

convém ressaltar que o p é o semi perímetro do trapézio de lados a, b, c e d.

25) Um losango do qual um dos ângulos vale 60°, está circunscrito a um círculo de 9 m de raio. Calcular a área da superfície compreendida entre o losango e o círculo.

C. Naval — 1961



O triângulo AMO é retângulo e tem os ângulos agudos de 30° e 60". O lado OM sendo o raio do círculo vale 9 m e consequentemente a hipotenusa AO, que é a metade da diagonal maior, valerá 18 m. Por ser o ângulo A do losango, de 60°, o triângulo ADC é equilátero e como conhecemos a sua altura AO, podemos calcular o seu lado, que é a diagonal menor do losango. Então

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad 18 = \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad \text{e}$$

$$l = 12\sqrt{3}\,\text{m}$$

Sendo a diagonal maior igual a 36 m e a menor $12\sqrt{3}$ m, a área do losango será

$$S = \frac{d \times d'}{2} = \frac{36 \times 12\sqrt{3}}{2} = 373{,}68\,\text{m}^2$$

Por outro lado, a área do círculo é

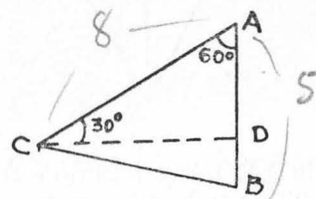
$$S = \pi R^2 = 3,14 \times 81 = 254,34 \text{ m}^2$$

A área pedida será

$$373,68 \text{ m}^2 - 254,34 \text{ m}^2 = 119,34 \text{ m}^2$$

26) Dois lados de um triângulo medem 5 cm e 8 cm e formam um ângulo de 60°. Calcular o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

C. Naval — 1963



Na figura AC = 8 cm; AB = 5 cm e o ângulo CAB = 60°.
Com o traçado da perpendicular CD sobre AB, ficaram formados os triângulos retângulos CDA e CDB.
O triângulo CDA tem os ângulos agudos de 30° e 60°, portanto AD = 4 cm. Consequentemente DB = 5 cm — — 4 cm = 1 cm.

$$CD = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \quad \text{e} \quad CD^2 = 48$$

Então do triângulo CDB, tem-se:

$$CB^2 = CD^2 + DB^2 \quad \text{ou}$$

$$CB^2 = 48 + 1 = 49$$

$$CB = 7 \text{ cm}.$$

Para termos a área do triângulo poderíamos escrever:

$$S = \frac{AB \times CD}{2} = \frac{5 \times 4\sqrt{3}}{2} = 17,32 \text{ cm}^2$$

ou empregar a fórmula

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

na qual p = 10 cm.
Sabemos também que:

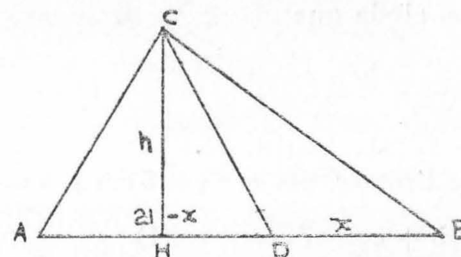
$$S = \frac{abc}{4R} \quad \text{e} \quad R = \frac{abc}{4S}$$

e então:

$$R = \frac{5 \times 8 \times 7}{4 \times 17,32} = 4,40 \text{ cm}$$

27) Dado o triângulo ABC, toma-se sôbre o lado AB = 21 m, um ponto D, tal que a área do triângulo DBC seja o dôbro da área do triângulo ADC. Qual o comprimento do segmento AD?

C. Naval — 1959



O problema diz que

$$S_{DBC} = 2 \times S_{ADC} \qquad (1)$$

Mas

$$S_{DBC} = \frac{x \times h}{2} \quad e \qquad (2)$$

$$S_{ADC} = \frac{(21 - x) \times h}{2} \qquad (3)$$

As equações 1, 2 e 3 permitem escrever:

$$\frac{xh}{2} = 2 \times \frac{(21 - x) \times h}{2} \quad e$$

$$\frac{x}{2} = 21 - x \quad \text{ou} \quad x = 14\,m$$

Sendo AB = 21 m e DB = 14 m, segue-se que AD = 7 m.

28) Um triângulo retângulo está inscrito num círculo de diâmetro 37 cm e circunscrito a um círculo de 5 cm de raio Calcular a área do triângulo.

Sabemos que o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo retângulo é a hipotenusa do mesmo triângulo.
Sabemos ainda que

$$r = \frac{b + c - a}{2}$$

de onde tiramos, por ser r = 5 cm e a = 37 cm

$$b + c = 47\,cm \qquad (1)$$

tratando-se de triângulo retângulo

$$37^2 = b^2 + c^2 \qquad (2)$$

As equações 1 e 2 nos permitem calcular

$$bc = 420\,cm^2$$

e como

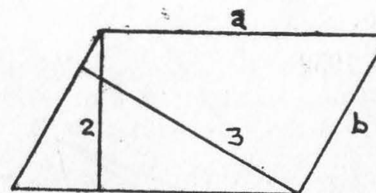
$$S = \frac{bc}{2}$$

segue-se que

$$S = 210\,cm^2$$

29) As alturas de um paralelogramo medem 3 m e 2 m. Achar os lados do paralelogramo, sabendo-se que o seu semi-perímetro é 20 m.

C. Naval — 1959



Na figura estão representadas as duas alturas do paralelogramo, isto é, 2 m e 3 m.

O perímetro sendo 20 m,

$$a + b = 10\,m$$

A área do paralelogramo pode ser expressa de duas maneiras, isto é:

$$S = 3b \quad e \quad S = 2a$$

Podemos então escrever

$$3b = 2a \quad \text{ou} \quad b = \frac{2a}{3}$$

Substituindo-se esse resultado na expressão que exprime o semi-perímetro do paralelogramo, vem:

$$a + \frac{2a}{3} = 10 \quad \text{ou}$$

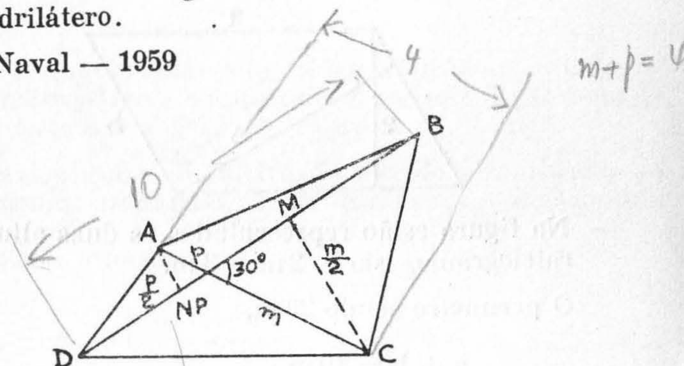
$$3a + 2a = 30 \quad \text{e} \quad a = 6\,\text{m}$$

Depois disse

$$b = \frac{2 \times 6}{3} = 4\,\text{m}$$

30) No quadrilátero abaixo são dados AC = 4 dm; BD = 10dm. e ângulo BPC = 30°. Calcular a área do quadrilátero.

C. Naval — 1959



A figura dada no problema não contém as linhas tracejadas e perpendiculares à diagonal BD e bem assim as letras *m* e *p* e as frações $\frac{m}{2}$ e $\frac{p}{2}$ e as letras maiúsculas M e N.

Os triângulos CPM e APN, são retângulos e possuem um ângulo de 30°, dahi seus catetos CM e AN serem expressos por $\frac{m}{2}$ e $\frac{p}{2}$, como está assinalado na figura.

A área do quadrilátero ABCD é a soma das áreas dos triângulos ADB e CBD.

Vejamos:

$$S_{ADB} = \frac{10 \times \frac{p}{2}}{2} = \frac{5p}{2}$$

$$S_{BDC} = \frac{10 \times \frac{m}{2}}{2} = \frac{5m}{2}$$

Depois do que ficou dito

$$S_{ABCD} = \frac{5p}{2} + \frac{5m}{2} = \frac{5(p+m)}{2}$$

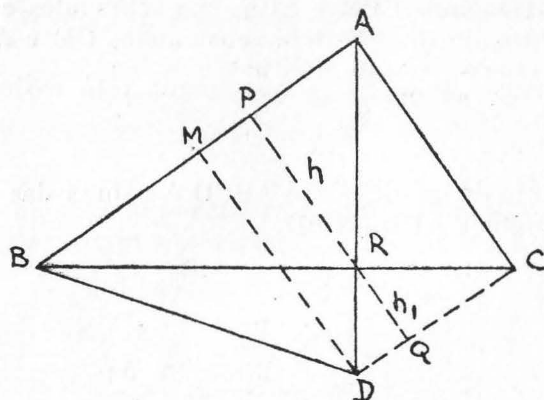
Como

$$p + m = 4\,\text{dm}$$

$$S_{ABCD} = \frac{5 \times 4}{2} = 10\,\text{dm}^2$$

31) Os catetos de um triângulo retângulo ABC mede AB = 4 cm e AC = 3 cm. Constroi-se sobre AB como base, e do mesmo lado de C, o triângulo isósceles ABD, equivalente ao triângulo ABC. Calcule a área da superfície comum a esses dois triângulos.

C. Naval — 1960



A altura DM do triângulo ADB é paralela ao cateto AC e igual a ele (dois triângulos de mesma base, para terem a mesma área precisam ter a mesma altura). DM, como altura de triângulo isósceles divide o lado oposto ao meio e então AM = 1,5 e consequentemente CD = 1,5 cm.

Os triângulos ARB e RDC são semelhantes e permitem escrever:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{h}{h_1} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{1,5} = \frac{h}{h_1} \quad \text{ou}$$

$$\frac{3 + 1,5}{3} = \frac{h + h_1}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{4,5}{3} = \frac{4}{h} \quad \text{e}$$

$$h = \frac{8}{3}\ \text{cm}$$

A área procurada é a do triângulo RAB, que será:

$$S_{RAB} = \frac{3 \times \frac{8}{3}}{2} = 4\ \text{cm}^2$$

32) Os lados de três octógonos regulares são respectivamente l, l_1 e l_2. Pergunta-se qual deverá ser o lado de um octógono para que ele seja equivalente à soma dos tres octógonos dados.

Chamemos de S, S_1, S_2 as áreas dos octógonos dados e cujos lados são l, l_1 e l_2.

Chamemos de S_3 a área do octógono procurado, cujo lado representaremos por x.

As superfícies dos octógonos regulares estão entre si como os quadrados de seus lados, então

$$\frac{S}{l^2} = \frac{S_1}{l_1^2} = \frac{S_2}{l_2^2} = \frac{S_3}{x^2}$$

Por outro lado

$$S + S_1 + S_2 = S_3$$

Então

$$l^2 + l_1^2 + l_2^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{l^2 + l_1^2 + l_2^2}$$

33) Exprimir a área de um triângulo em função das tres alturas.

Chamemos h_a, h_b e h_c as tres alturas do triângulo cujos lados são a, b e c.

Podemos escrever as tres maneiras de exprimir a área do triângulo.

$$S = \frac{ah_a}{2}; \quad S = \frac{bh_b}{2} \quad \text{e} \quad S = \frac{ch_c}{2}$$

e então:

$$\frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{ah_a = bh_b = ch_c}$$

e ainda

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

que nos mostra serem os lados do triângulo *a, b, c,* proporcionais aos inversos das alturas.
Quando dois triângulos tem os lados proporcionais, são semelhantes; então, o triângulo cujos lados são *a, b* e *c* é semelhante ao triângulo cujos lados são

$$\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b} \text{ e } \frac{1}{h_c}$$

Se chamarmos de S_1 a área do triângulo que tem para lados os inversos das tres alturas e que é semelhante ao triângulo cujos lados são *a, b* e *c,* poderemos escrever:

$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{a}{\frac{1}{h_a}}\right)^2 = \left(\frac{b}{\frac{1}{h_b}}\right)^2 = \left(\frac{c}{\frac{1}{h_c}}\right)^2$$

$$\frac{S}{S^1} = a^2h_a^2 = b^2h_b^2 = c^2h_c^2$$

Considerando, como já foi dito que

$$S = \frac{ch_c}{2} \quad \text{ou} \quad ch_c = 2S \quad \text{ou}$$

$$c^2h_c^2 = 4S^2 \quad \text{ou}$$

$$\frac{S}{S_1} = 4S^2 \quad \text{e} \quad S = \frac{1}{4S_1}$$

Trata-se, portanto, de calcular S_1, que é a área do triângulo cujos lados são os inversos das alturas.

34) **Calcular a área de um triângulo cujas alturas são 4 cm; 6 cm e 4,2 cm.**

Os inversos das alturas são:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{6} \text{ e } \frac{10}{42}$$

que correspondem aos lados do triângulo cuja área vamos calcular de modo a sabermos a área do triângulo *cujas alturas* foram dadas.

$$2p = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{10}{42} = \frac{55}{84}$$

$$p = \frac{55}{168}; \; p - a = \frac{55}{168} - \frac{42}{168} = \frac{13}{168}$$

$$p - b = \frac{55}{168} - \frac{28}{168} = \frac{27}{168} \quad \text{e}$$

$$p - c = \frac{55}{168} - \frac{40}{168} = \frac{15}{168}$$

Então, pelo que foi mostrado no exemplo anterior, teremos

$$S = \frac{1}{4\sqrt{\frac{55}{168} \times \frac{13}{168} \times \frac{27}{168} \times \frac{15}{168}}}$$

$$S = \frac{1}{4 \times \frac{540}{28224}} = \frac{7056}{540} = 13 \text{ cm}^2$$

35) **Um triângulo que tem para alturas h_a = 3cm, h_b = 2 mc e h_c = 1,5 cm, que valôres terá para lados?**

Se calcularmos a área do triângulo, poderemos vir a conhecer seus lados, de vez que suas alturas são conhecidas. Como vimos

$$S = \frac{1}{4 S_1}$$

As alturas sendo 3, 2 e 1,5 os lados do triângulo a considerar e que tem para área S_1, serão:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \text{ e } \frac{2}{3}$$

Seu perímetro será:

$$2p = \frac{3}{2}; \; p = \frac{3}{4}; \; p - a = \frac{5}{12};$$

$$p - b = \frac{1}{4} \text{ e } p - c = \frac{1}{12}$$

A área S_1, será

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{5}{12} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{12}} = \frac{4}{48}$$

Então

$$S = \frac{1}{4 S_1} = \frac{1}{4 \times \frac{4}{48}} = 3 \text{ cm}^2$$

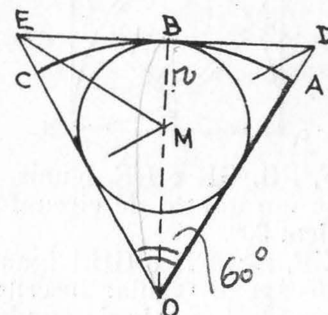
Como

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}, \text{ vem:}$$

$$3 = \frac{a \times 3}{2}; \; 3 = \frac{b \times 2}{2}; \; 3 = \frac{c \times 1{,}5}{2}$$

$$a = 2 \text{ cm}; \; b = 3 \text{ cm}; \; c = 4 \text{ cm}$$

36) Qual é a superfície do círculo, inscrito num sector de 60°?



Para inscrever um círculo num setor circular, traça-se uma tangente DBE pelo ponto B, meio de DE ou do arco ABC, de modo a termos um triângulo ODE. A seguir teremos que inscrever um círculo no triângulo OED, com raio igual a BM.

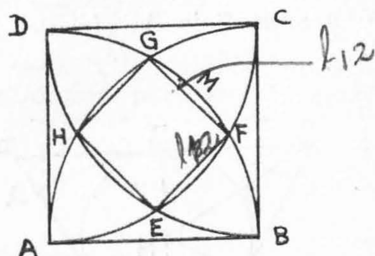
Por ser um setor de 60°, o triângulo OED é equilátero.

Assim sendo, a altura, a bissetriz e a mediana se encontram em M, que fica situada a $^1/_3$ de BO, distância essa que é o raio do círculo inscrito. Então a área do círculo inscrito será

$$S = \pi \text{ BM}^2 \text{ ou}$$

$$S = \pi \times \left(\frac{BO}{3} \right)^2 = \frac{\pi BO^2}{9}$$

37) De cada vértice de um quadrado de lado r, como centro, descreve-se um quarto de círculo. Qual é a área da superfície quadrangular curvilínea EFGH, compreendida entre os quatro arcos que se cortam dois a dois?



Os arcos EF, FG, GH e HE, iguais, são a terça parte dos arcos de um quarto de circunferência traçados e portanto valem 30°.
As cordas GF, EF, EH e GH, iguais, representam o lado do dodecágono regular inscrito.
A área procurada é aquela do quadrado EFGH, acrescida de quatro vêzes a área do segmento FMG, por exemplo.
Teremos então.
Área do quadrado de lado igual ao do dodecágono.

$$S = \left(r\sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2 = r^2\,(2-\sqrt{3})$$

Área do segmento de FMG de 30°, no círculo de raio r

$$S_1 = r^2 \times \frac{\pi - 3}{12}$$

O quádruplo dessa área será

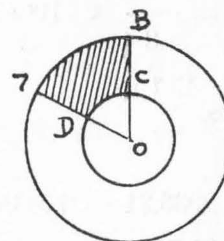
$$\frac{r^2\,(\pi - 3)}{3}$$

A área pedida será

$$S_{EFGH} = r^2\,(2-\sqrt{3}) + \frac{r^2\,(\pi-3)}{3} =$$

$$= \frac{r^2\,[\pi + 3(1-\sqrt{3})\,]}{3}$$

38) As áreas de dois círculos concentricos estão entre si na razão de $^5/_8$. A área do trapézio circular de 45° é de 300 m². Calcular os raios desses dois círculos.



O trapézio circular é o tracejado na figura.
Sua área é dada por:

$$S = \frac{\pi\,n}{360}\,(R^2 - R_1^2)$$

Então

$$300 = \frac{\pi \times 45}{360}\,(R^2 - R_1^2) \quad \text{e}$$

$$R^2 - R_1^2 = \frac{2400}{\pi}$$

Por outro lado o problema diz que

$$\frac{\pi R_1^2}{\pi R^2} = \frac{5}{8} \quad \text{ou}$$

$$\frac{R_1^2}{R^2} = \frac{5}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{8}{5} \quad \text{ou}$$

$$\frac{R^2 - R_1^2}{R^2} = \frac{8-5}{8} \quad \text{ou}$$

$$\frac{2400}{R^2} = \frac{3}{8} \quad \text{e} \quad R^2 = 2038{,}21$$

$$\text{e} \quad R = 45{,}1 \text{ m}$$

Então

$$R_1^2 = 2038{,}21 - 764{,}33 = 1273{,}88$$

$$R_1 = 35{,}7 \text{ m}$$

39) A superfície de um triângulo retângulo é 726 m² a hipotenusa tem 55 m. Calcular os dois catetos.

O problema dá

$$\frac{bc}{2} = 726 \quad (1)$$

Temos a relação

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{ou} \quad b^2 + c^2 = 55^2 \quad (2)$$

Da igualdade (1) tiramos

$$2bc = 2904 \quad (3)$$

Somando-se as igualdades (2) e (3), vem:

$$b^2 + 2bc + c^2 = 3025 + 2904 \quad \text{ou}$$

$$(b + c)^2 = 5929 \quad \text{e} \quad b + c = 77 \quad (4)$$

Subtraindo-se da igualdade (2) a igualdade (3), vem

$$b^2 + c^2 - 2bc = 3025 - 2904 \quad \text{ou}$$

$$(b - c)^2 = 121 \quad \text{e} \quad b - c = 11 \quad (5)$$

Temos então as igualdades (4) e (5), que formam um sistema, que resolvido dá

$$b = 44 \text{ m} \quad \text{e} \quad C = 33 \text{ m}$$

40) Duas circunferências concêntricas formam uma coroa circular de 25,1328 m². A largura da coroa é de 2m. Pede-se o raio de cada uma circunferência.

A área da coroa é:

$$S = \pi (R^2 - r^2)$$

O problema diz que

$$R - r = 2 \quad \text{ou} \quad R = 2 + r$$

Então:

$$S = \pi [(2 + r)^2 - r^2] \quad \text{ou} \quad \frac{S}{\pi} = 4r + 4 \quad \text{ou}$$

$$\frac{S}{\pi} - 4 = 4r \quad \text{e}$$

$$r = \frac{\frac{S}{\pi} - 4}{4} = \frac{S}{4\pi} - 1 \quad \text{ou}$$

$$r = \frac{25,1328}{4 \times 3,1416} - 1 = 1 \text{ m (aproximadamente)}$$

Então:

$$R = r + 2 = 3 \text{ m}$$

EXERCÍCIOS A RESOLVER

1) Qual a área de um quadrado cujo perímetro vale 40 cm?

RESP.: 100 cm²

2) Achar a área de um paralelogramo que tem um ângulo de 120° formado por lados que medem 2 m e 3 m respectivamente.

RESP.: 5,1960 m²

3) Quais as dimensões de um retângulo cuja área é de 32 cm², sabendo-se que a razão da base para a altura é 4.

RESP.: altura: 2,828 m
base: 11,312 cm

4) Calcular a área de um retângulo sabendo-se que sua diagonal é 5 m e o perímetro 14 m.

C. Naval — 1953 RESP.: 12 m²

5) A área de um triângulo é 60 m² e a altura 7,5 m. Calcular a base.

RESP.: 16 cm

6) Qual a área de um quadrado inscrito num círculo de raio igual a $\sqrt{8}$ metros?

C. Naval — 1957 RESP.: 16 m²

7) Calcular a área de um triângulo equilátero de 48 cm de altura.

RESP.: 1328,64 cm²

8) Calcular a área de um losango cujo perímetro vale 8 m e uma diagonal 2 m.

RESP.: 3,4640 m²

9) As bases de um trapézio isósceles medem respectivamente 10 m e 16 m e os lados não paralelos 5 m. Calcular a sua área.

RESP.: 52 m²

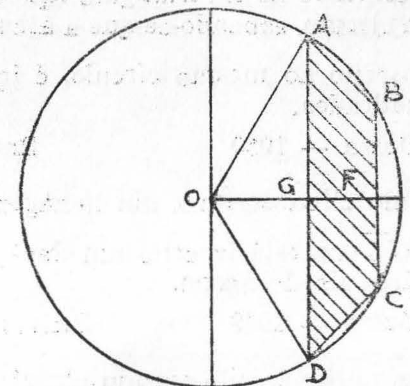
10) Calcular a área de um triângulo cujos lados são 3 m, 4 m e 5 m, sendo o raio do círculo inscrito nesse triângulo igual a 1 m.

RESP.: 6 m²

11) Calcular a área de um triângulo de lados 6 m, 8 m e 10 m inscrito em um círculo de raio 5 m.

RESP.: 24 m²

12) Observe a figura. Você vai calcular a área do pentágono OABCD mediante parcelamento dessa área em *duas* outras, sabendo-se que OA = 2,5 m = R (raio do círculo circunscrito) AD = lado do triângulo eqüilátero inscrito. BC = OA e BC paralela a AD.



E.P.C.Ar — 1963 RESP.: 5,8281 cm²

13) Dado o triângulo retângulo ABC pede-se determinar DC de modo que o triângulo CDE seja equivalente ao trapézio DEAB, sabendo que AC = 3 m; AB = 4 m e DE paralela a AB.

C. Naval — 1955 Resp.: $\frac{3\sqrt{2}\,m}{2}$

14) Num triângulo retângulo de 30 m² de área e 30 m de perímetro, calcular os raios dos círculos inscrito e circunscrito a esse triângulo.

E.N.C. Dutra — 1953 Resp.: R = 6,5 m e r = 2m

15) Calcular a área do triângulo cujos lados são 7 cm; 8 cm e 9 cm.

Resp.: 26,83 cm²

16) Calcular a área, em centímetros quadrados, de um triângulo retângulo, cujo perímetro tem 1200 cm e a altura sobre a hipotenusa, 2,4 m.

E.M. — 1938 Resp.: 60.000 cm²

17) Achar o perímetro de um triângulo equilátero circunscrito a um círculo, sabendo-se que a área do hexágono regular inscrito no mesmo círculo, é igual a $24\sqrt{3}$ metros quadrados.

E.N.C. Dutra — 1950 Resp.: 41,57 m

18) Num círculo circunscrito a um hexágono regular de apotema $\sqrt{3}$ cm, está inscrito um decágono regular. Achar a área do decágono.

E.N.C. Dutra — 1949 Resp.: 11,7420 cm²

19) Um trapézio está inscrito em um círculo de diâmetro 12 m. A projeção de um dos lados não paralelos do trapézio sobre o diâmetro é igual a 3 m. Achar a área do trapézio. A base maior é o diâmetro

E.N.C. Dutra — 1950 Resp.: 46,76 m²

20) Num trapézio isósceles a base maior mede 14 m; a base média 10 m e a área 30 m². Calcule o perímetro desse trapézio.

I.E. — 1951 Resp.: 30 m

21) As duas bases de um trapézio teem 20 m e 30 m, e a altura 12 m Calcular a superfície do triângulo formado pela menor base e os prolongamentos dos lados não paralelos.

C. Naval — 1952 Resp.: 240 m²

22) Em um trapézio a soma das bases é 13 m; a base menor mais a altura é 8 m e a base maior mais a altura 11 m. Determinar sua área.

C. Naval — 1953 Resp.: 19,50 m²

23) ABCD é um trapézio isósceles com 30 m² de área e cujas bases AB e CD são iguais aos lados do triângulo equilátero e do hexágono regular inscrito num círculo de raio 6 m. Calcular a área do menor triângulo que se obtem prolongando os lados não paralelos desse trapézio até se encontrarem.

C. Naval — 1961 Resp.: ~~15 m²~~

24) Achar a área de um trapézio retângulo cujas bases medem 32 cm e 12 cm, sendo um dos ângulos de 30°.

C. Naval — 1959 Resp.: 254,33 cm²

25) Um trapézio isósceles circunscrito a um círculo tem 156 m² de área; a soma de suas bases vale 26 m. Calcular os lados desse trapézio.

C. Naval — 1959 Resp.: 8m; 18m; 13m; e 13m

26) Em um trapézio ABCD, AB = 10 m, BC = 7 m, CD = 5 m e DA = 6 m. Calcule a área desse trapézio sabendo-se que a base maior é AB.

C. Naval — 1958 RESP.: 43,2

27) Achar a área de um trapézio isósceles cuja base maior é 22 cm, cuja altura é 8 cm e cujos lados não paralelos são iguais à base menor.

E.N.C. Dutra — 1949 RESP.: 128 cm²

28) Dá-se o trapézio ABCD de bases AB = 6 m; CD = 4 m e a altura h = 3 m. Seja *O* o ponto de interseção de suas diagonais Calcule a área do triângulo COD.

C. Naval — 1958 RESP.: 24 m²

29) Um triângulo e um trapézio da mesma altura têm a mesma área. Calcule a base média do trapézio, sabendo-se que a base do triângulo mede 18 cm.
I. E. — 1955 RESP.: 9 cm

30 — As bases de um trapézio medem 60 m e 40 m, respectivamente e a altura 20 m. Uma paralela às bases divide o trapézio em duas partes, cujas áreas estão entre si na razão de ¾. Calcular o comprimento dessa paralela.

RESP.: 49,58 m

31) As diagonais de um losango formam com um lado ângulos que guardam a razão ½. Sendo a maior diagonal igual a 20 m, calcular a área do losango.

I.E. — 1952 RESP.: 115,40 m²

32) Um losango está inscrito num círculo cuja área é igual a π m². Calcule a área do losango.

I.E. — 1952 RESP.: 2 m²

33) Dado o hexágono regular ABCDEF, calcular a área do trapézio ABCD, sabendo-se que AB mede 6 m.

C. Naval — 1959 RESP.: 46,71 m²

34) Num círculo de 5 dm de raio inscreve-se um retângulo. Determine a área desse retângulo sabendo-se que a razão entre a base e a altura é ¾.

I.E. — 1953 RESP.: 48 dm²

35) Num triângulo isósceles os lados iguais valem 10 m cada um. A projeção de um dos lados iguais sobre o terceiro lado é 6 m. Calcular a área desse triângulo.

C. Naval — 1953 RESP.: 48 m²

36) O ponto de contacto com a hipotenusa de um círculo inscrito num triângulo retângulo, determina sobre a mesma, segmentos de 5 cm e 4 cm. Qual a área do triângulo.

C. Naval — 1961 RESP.: 20,115 cm²

37) Constroem-se sobre os lados de um triângulo equilátero ABC de lado 10 m, três quadrados. Ligam-se os vértices dos quadrados por segmentos rectilíneos. Determinar a área da figura obtida.

C. Naval — 1959 RESP.: 472,60 m²

38) O retângulo formado por dois lados opostos de um hexágono regular e duas diagonais paralelas têm $16\sqrt{3}$ cm² de área. Calcule o raio do círculo circunscrito.

C. Naval — 1960 RESP.: 4 cm

39) Calcule o raio do círculo inscrito no triângulo cujos lados medem respectivamente 7 m, 8 m e 9 m.

C. Naval — 1958 RESP.: 2,236 m

40) A corda CD é ortogonal ao diâmetro AB de um círculo e divide o diâmetro em segmentos que medem 5 m e 20 m. Calcule a área do triângulo ABC.

C. Naval — 1958 RESP.: 125 m²

41) O perímetro de um triângulo equilátero inscrito em um círculo mede $12\sqrt{3}$ cm. Calcule a área dêsse círculo.

I.E. — 1955 Resp.: 50,24 cm²

42) Um triângulo é equivalente a um retângulo cujas dimensões medem 6 m e 8 m, respectivamente. A base do triângulo é igual à diagonal do retângulo. Calcular a altura do triângulo.

E.N.C. Dutra — 1948 Resp.: 9,6 m

43) As áreas de dois triângulos equiláteros são $108\sqrt{3}$ decímetros quadrados Qual é a razão entre as alturas dos triângulos?

I.E. — 1952 Resp.: 6

44) O ângulo A de um triângulo ABC, mede 45°; o lado AB tem 6 m, e o lado AC, 12 m. Sobre AB, a partir de A, toma-se AD = 2 m e traça-se DE paralela a AC. Calcule a área do trapézio DACE.

I.E. — 1952 Resp.: 14,14 m²

45) Um polígono regular tem 40 m² de área e 8 m de perímetro. Calcular a área do círculo inscrito.

C. Naval — 1951 Resp: 314 cm²

46) Calcular a circunferência de um círculo circunscrito a um quadrado de 128 m² de superfície.

C. Naval — 1952 Resp.: 50,2656 m

47) Calcule a área do círculo no qual está inscrito um quadrado de área igual a 50 m².

I.E. — 1951 Resp.: 78,50 m²

48) Dois círculos de raios R e r são tangentes exteriores. Calcular em função de R e r, a área do quadrilátero

determinado pelo segmento da tangente comum, pelos raios nos pontos de tangencia e pela linha dos centros.

C. Naval — 1963 Resp.: $(R + r)\sqrt{Rr}$

49) Calcule a área do menor dos segmentos circulares cuja corda é o lado do hexágono regular inscrito nesse círculo cujo raio mede 6 m.

C. Naval — 1958 Resp.: 3,27 m²

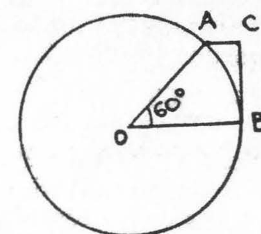
50) Num círculo de 4 m de diâmetro traça-se uma corda igual ao raio. Calcule as áreas dos dois segmentos circulares em que o círculo ficou dividido por essa corda.

I.E. — 1953 Resp.: 0,36 m² e 12,20 m²

51) Um quadrado está inscrito num círculo de raio $\frac{1}{\sqrt{\pi - 2}}$ metros.
Calcule a área do segmento circular, cuja corda é o lado do quadrado.

C. Naval — 1957 Resp.: 0,25 m²

52) Na figura abaixo OA e OB são raios da circunferência e medem 12 m. AC é perpendicular à tangente BC, Calcule a área da figura OBCA, sabendo-se que o ângulo AOB = 60°.



C. Naval — 1958 Resp.: 91,8 m²

53) Qual é o comprimento do arco de um setor de 28,48m² de superfície e de 7,12 m de raio.

C. Naval — 1952 RESP.: 8 m

54) A flexa correspondente ao menor arco de uma circunferência, subtendido pela corda de 3 m de comprimento mede 0,5 m. Qual o excesso da área do retângulo sobre a área do triângulo isósceles inscrito neste círculo e que tem para base a corda dada.

C. Naval — 1959 RESP.: 5,25 m²

55) Um arco AB tem para comprimento 80 cm e as tangentes em A e B formam um ângulo de 144°. Calcular a área do círculo.

ok C. Naval — 1959 RESP.: 50955,41 cm²

* 56) Dado um triângulo equilátero ABC, com 6 cm de lado traça-se um círculo de diâmetro BC que encontra os lados AB e AC. Calcule a área da porsão do círculo exterior ao triângulo ABC.

C. Naval — 1960 RESP.: 15,75 cm²

57) Os raios de dois círculos concentricos medem 5 m e 2 m, respectivamente. Calcular a área da coroa circular.

E.N.C. Dutra — 1948 RESP.: 65,94 m²

58) Num círculo de raio R um arco de 4°30' mede 1,57 dm Calcular a área do círculo ($\pi = 3{,}14$).

E.N.C. Dutra — 1953 RESP.: 1256 dm²

59) O comprimento da circunferência externa de uma coroa circular é de 9,42 m. Sabendo-se que a diferença dos raios das circunferências externa e interna é 0,5 m, calcular a área dessa coroa

C. Naval — 1953 RESP.: 3,9250 m²

60) Dividir um circulo de raio R = 10 m em duas partes equivalentes, empregando um círculo concentrico. Qual o raio r do circulo interno.

C. Naval — 1959 RESP.: 7,05 m²

61) A soma dos raios de duas circunferências é de 7 m e sua razão é 6. Calcular a área da coroa circular.

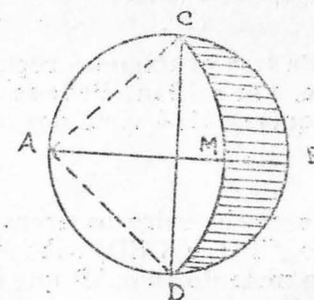
C. Naval — 1959 RESP.: 109,90 m²

62) Num quadrado, cujo lado mede 6 m, inscreve-se um círculo, nesse círculo inscreve-se um triângulo equilátero e nesse triângulo inscreve-se um círculo. Pede-se calcular.

1.°) A diagonal do quadrado.
2.°) O apotema e a área do triângulo equilátero
3.°) A área da coroa circular, limitada pelos dois círculos.

E.N.C.D. — 1947 RESP.: diagonal 8,484 m
apotema 1,5 m
área tri. 11,70 m²
área cor. 21,1850m²

63) Na figura AB e CD são diâmetros perpendiculares de um círculo de raio 6 cm. Do ponto A, como centro e raio AC, traça-se o arc CMD. Calcular a área tracejada.



C. Naval — 1963 RESP.: 36 cm²

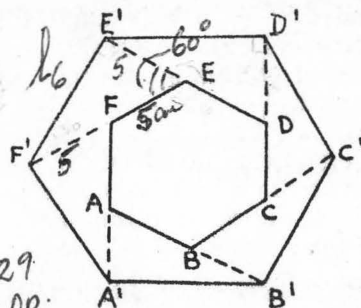
ok
*

64) Calcular a área do quadrilátero formado pelas bissetrizes dos ângulos internos do retângulo cujas dimensões são 10 m e 6 m.

C. Naval — 1959 RESP.: 8 m²

ok
*

65) A figura ABCDEF é um hexágono regular com 5 cm de lado. AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF = 5cm. Calcular a área do hexágono A'B'C'D'E'F.



Problema Vilar Nº 30 pag 29 2ª AP.

C. Naval — 1960 RESP.: 194,625 cm²

ok *

66) Um triângulo equilátero ABC tem 60 m de perímetro Prolonga-se a base BC e sobre esse prolongamento toma-se CS=12 m Une-se o ponto S ao meio M do lado AB. Calcular a área do quadrilátero BCGM.

(Thiré) SM corta AC em G. RESP.: 110,21 m²

67) Os lados de tres pentágonos regulares são respectivamente 3 m, 4 m e 12 m. Pede-se o lado do pentágono que seja equivalente à soma dos tres pentágonos dados

RESP.: 13 m

68) Calcular a razão entre as áreas dos dois segmentos de círculo CBD e CED, sabendo que a corda CD passa pelo meio do raio AB que lhe é perpendicular.

RESP.: 0,24

69) Calcular a razão entre as áreas do hexágono regular inscrito em um círculo e do triângulo equilátero circunscrito ao mesmo círculo.

RESP.: $\frac{1}{2}$

70) Sobre cada um dos lados de um quadrado, como diâmetro e no interior do quadrado, descrevem-se semicircunferências que determinam uma rosacea de quato falhas. Calcular a área da rosacea sendo o lado do quadrado $\sqrt{2}$ dm.

RESP.: 2,2832 dm²

71) Calcular a área de um triângulo cujas alturas são: 3 cm; 4 cm e 2,4 cm.

RESP.: 6 cm²

72) Qual é a superfície de um círculo inscrito em um setor de 90° de um círculo de raio 3 m?

RESP.: 5,0868 m²

73) Qual a área de um círculo inscrito em um setor de 3m de raio e de 120° de amplitude.

RESP.: 6,7824 m²

74) Dão-se tres círculos iguais, tangentes dois a dois; exprimir a área da superfície curvilinea compreendida entre os tres círculos, de raio 5 m.

RESP.: 4 m²

75) Os centros de quatro círculos iguais, tangentes dois a dois, são os vértices de um losango cujo lado é igual a uma das diagonais, calcular a superfície curvilinea, compreendida entre os quatro círculos, sabendo que é de 3 m o raio dos círculos.

RESP.: 2,88 m²

76) Tomando-se cada vértice de um triângulo equilátero por centro e o raio igual ao lado descrevem-se tres arcos, de modo a obter-se um triângulo equilátero curvilineo. Calcular a área da figura considerando o lado do triângulo igual à 5 m.

RESP.: 17,6

77) De cada vértice de um quadrado, de 4m de lado, como centro, descreve-se um quarto de círculo com o raio igual ao lado do quadrado. Calcular a área da rosacea assim formada.

RESP.: 5,06 m^2

78) A área de um pentágono regular é o quádruplo da área do outro pentágono regular. O perímetro do primeiro é 40 m. Calcular o lado do segundo.

I.E. — 1951 RESP.: 4 m

79) São dados dois triângulos semelhantes T e T', sendo S a área do primeiro e S_1 a área do segundo. O lado l_1 do triângulo T', é igual ao segmento áureo do lado l, homologo, do triângulo T. Determinar a razão entre S e S_1.

E.N.C. Dutra — 1953 RESP.: $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

80) A área de um polígono mede 10 metros quadrados Determinar a área do polígono semelhante cujo perímetro é tres vezes maior.

C. Naval — 1951 RESP.: 90 m^2

81) A área de um polígono mede 1 800 m^2; calcule a área de um polígono semelhante sabendo que a razão da semelhança do primeiro para o segundo é 3 para 2.

E.N.C. Dutra — 1955 RESP.: 800 m^2

52.
0.4
20.8

52.
20.8
72.8
0.
364.
1456
18,20
7
1
9